А. Х. Шахмейстер

Задачи с параметрами на экзаменах

ПОСОБИЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ,
АБИТУРИЕНТОВ И УЧИТЕЛЕЙ

Под общей редакцией
заслуженного учителя РФ Б. Г. Зива

С.-Петербург
Москва
2009

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

Редакторы:

Кандидат физ.-мат. наук, доцент РГПУ им. Герцена, заслуженный учитель РФ С. Е. Рукшин.

Кандидат пед. наук, доцент кафедры математики МИОО А. В. Семенов.

Рецензенты:

Доктор физ.-мат. наук, профессор МГУ Г. Ю. Ризниченко,
заслуженный учитель РФ Т. И. Курсиш,
заслуженный учитель РФ Е. Б. Лившиц.

Шахмейстер А. Х.

Ш 32 Задачи с параметрами на экзаменах. — 3-е изд., исправленное. — М.: Издательство МЦНМО : СПб.: «Петроглиф» : «Виктория плюс», 2009. — 248 с.: илл. — ISBN 978-5-94057-536-8, ISBN 978-5-98712-041-5, ISBN 978-5-91281-056-5.

Данное пособие является продолжением книги «Уравнения и неравенства с параметрами» и предназначено для углубленного изучения школьного курса математики, содержит большое количество разноуровневого тренировочного материала. В книге представлена программа для проведения элективных курсов в профильных и предпрофильных классах. Пособие адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

ISBN 978-5-94057-536-8 (Издательство МЦНМО)
ISBN 978-5-98712-041-5 (ООО «Петроглиф»)
ISBN 978-5-91281-056-5 (ООО «Виктория плюс»)

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

Предисловие

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачники по данной теме и как сборники дидактических материалов. Каждая книга снабжена программой элективного курса.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т.д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы:

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Эти пособия идеально подходят в качестве материала для повторения параллельно изучению других тем в школе.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

Программа элективного курса для учащихся 8-11 классов (55 уроков).

№№ уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий
1–7	**Дробно-рациональные уравнения (стр. 5–31)** Практикум 1 (1, 3, 4, 6, 8, 12, 14, 15, 17) – 3 урока. Тренировочная работа 1 (1–3, 5–7,9,10,12) – 4 урока.
8–12	**Системы уравнений и неравенств (стр. 32–50)** Практикум 2 (1, 2, 4, 5, 7, 8, 9) – 2 урока. Тренировочная работа 2 (1, 2, 4, 5, 7, 8) – 3 урока.
13–17	**Неравенства (стр. 51–64)** Практикум 3 (1, 4, 5, 6, 7) – 2 урока. Тренировочная работа 3 (1, 2, 4–7) – 3 урока.
18–22	**Иррациональные уравнения (стр. 65–84)** Практикум 4 (2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11) – 3 урока. Тренировочная работа 4 (1, 3, 4, 6, 8) – 2 урока.
23–26	**Иррациональные неравенства (стр. 85–98)** Практикум 5 (2, 3, 4, 6) – 2 урока. Тренировочная работа 5 (2–5) – 2 урока.
27 –35	**Параметры в тригонометрии (стр. 99–141)** Практикум 6 (1, 2, 5, 7, 8, 9 ,11(2 способ),13, 14, 15, 17) – 4 урока. Тренировочная работа 6 (1,2,4,5,7,8,10,11,12,14(2 сп.)) – 4 урока.
36–41	**Показательные уравнения и неравенства (стр. 142–156)** Практикум 7 (1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12) – 3 урока. Тренировочная работа 7 (2, 4, 5, 6, 7, 8) – 3 урока.
42–47	**Логарифмические уравнения и неравенства (стр. 157–186)** Практикум 8 (1, 2, 4, 6, 8, 10, 13) – 3 урока. Тренировочная работа 8 (1, 2, 5, 7, 9, 13) – 3 урока.
48–55	**Задачи математического анализа (стр. 187–245)** Практикум 9 (1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 13, 19, 20, 21) – 4 урока. Тренировочная работа 9 (2, 4, 6, 7, 9, 13, 14, 15, 17, 19) – 4 урока.

Программа подготовлена, составлена и апробирована на практике заслуженным учителем РФ Е. Б. Лившицем.

1 Дробно-рациональные уравнения[1]

Практикум 1

1. Для каждого значения параметра a найдите число корней уравнения

$$9\left(3x-1\right)a^2-\left(21x-19\right)a+2\left(x-1\right)=0.$$

$$\underline{27a^2x}-9a^2-\underline{21ax}+19a+\underline{2x}-2=0;$$

$$\left(27a^2-21a+2\right)x=9a^2-19a+2;$$

а) $27a^2-21a+2=0;$

$$a_{1,2}=\frac{21\pm\sqrt{21^2-4\cdot2\cdot27}}{2\cdot27}=\frac{21\pm3\sqrt{49-24}}{2\cdot27}=\frac{7\pm5}{18};\quad \left[\begin{array}{l}a=\dfrac{2}{3}\\[2mm] a=\dfrac{1}{9}\end{array}\right.;$$

$$27a^2-21a+2=\left(9a-1\right)\left(3a-2\right).$$

б) $9a^2-19a+2=0;$ $a_{1,2}=\dfrac{19\pm\sqrt{19^2-4\cdot9\cdot2}}{2\cdot9}=\dfrac{19\pm17}{2\cdot9};$ $\left[\begin{array}{l}a=2\\ a=\dfrac{1}{9}\end{array}\right.;$

$$9a^2-19a+2=\left(9a-1\right)\left(a-2\right).$$

Итак, уравнение имеет стандартный вид линейного уравнения.

$$\left(9a-1\right)\left(3a-2\right)x=\left(9a-1\right)\left(a-2\right):$$

---

[1]Подробнее см. Шахмейстер А. Х. Уравнения и неравенства с параметрами. СПб.: «ЧеРо-на-Неве», 2006. Гл. 1, 2.

а) при $\begin{cases} a \neq \dfrac{1}{9} \\ a \neq \dfrac{2}{3} \end{cases}$ $\exists$ единственный $x = \dfrac{a-2}{3a-2}$;

б) при $a = \dfrac{1}{9}$; $0 \cdot x = 0$; $\forall x$ – решение;

в) при $a = \dfrac{2}{3}$; $0 \cdot x = 5 \cdot \left(-1\dfrac{1}{3}\right)$; $x \in \varnothing$.

Ответ: уравнение $9(3x-1)a^2 - (21x-19)a + 2(x-1) = 0$ имеет:

1) при $\begin{cases} a \neq \dfrac{1}{9} \\ a \neq \dfrac{2}{3} \end{cases}$ единственный корень $x = \dfrac{a-2}{3a-2}$;

2) при $a = \dfrac{1}{9}$ бесконечное множество решений $x \in (-\infty; \infty)$;

3) при $a = \dfrac{2}{3}$ решений нет.

2. Сколько корней имеет уравнение $3x(x-1)^2 = kx$ в зависимости от значения параметра k?

$3x(x-1)^2 = kx$; $x\left(3(x-1)^2 - k\right) = 0$;

один корень есть всегда – $x_0 = 0$.

Исследуем $3x^2 - 6x + 3 - k = 0$; $D = 3^2 - 3(3-k) = 3k$;

а) если $k = 0$, существует один корень $x = 1$;

б) если $k > 0$, существуют два корня $\left(x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{3k}}{3}\right)$,

но необходимо исследовать случай, когда один из корней равен нулю. Это так, если $k = 3$;

в) $k < 0$ – корней нет.

Ответ: уравнение $3x(x-1)^2 = kx$ имеет при

1) $\begin{cases} k > 0 \\ k \neq 3 \end{cases}$ три корня;

2) $k = 0$ два корня;

3) $k = 3$ два корня;

4) $k < 0$ один корень.

3. Сколько корней имеет уравнение $\frac{x^2}{x^2-2x+3}=a$ в зависимости от значений параметра a?

$\frac{x^2}{x^2-2x+3}=a$; $x^2=ax^2-2ax+3a$;

$\left(x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0\right)$;

$(a-1)\,x^2-2ax+3a=0$.

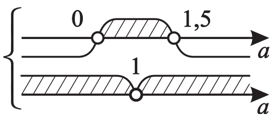
1) а) $a\neq 1$; $D=a^2-3a\,(a-1)=-2a^2+3a=-a\,(2a-3)$;

$$\begin{cases} a\neq 1 \\ D=0 \end{cases};\quad \begin{cases} a\neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=1{,}5 \end{array}\right. \end{cases} \text{ при } a\in\{0;\,1{,}5\}\ \exists \text{ один корень;}$$

б) $a=1 \quad\Rightarrow\quad 0\cdot x^2-2x+3=0$; $x=1{,}5$,

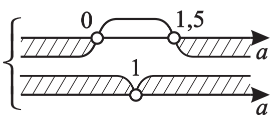
т.е. $\exists$ единственный корень при $a\in\{0;\,1;\,1{,}5\}$.

2) $\begin{cases} D>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$



$a\in(0;\,1)\cup(1;\,1{,}5)$ $\exists$ два корня.

3) $\begin{cases} D<0 \\ a\neq 1 \end{cases}$



$a\in(-\infty;\,0)\cup(1{,}5;\,\infty)$ – нет корней.

Ответ: уравнение $\frac{x^2}{x^2-2x+3}=a$ имеет

1) при $\left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=1 \\ a=1{,}5 \end{array}\right.$ $\exists$ единственный корень;

2) при $a\in(0;\,1)\cup(1;\,1{,}5)$ $\exists$ два корня;

3) при $a\in(-\infty;\,0)\cup(1{,}5;\,\infty)$ нет корней.

4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\frac{x^2+4x+9}{x^2+5x+9}=a$ имеет хотя бы одно решение.

$x^2+4x+9=ax^2+5ax+9a$;

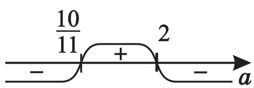
$(a-1)\,x^2+(5a-4)\,x+9\,(a-1)=0$;

$x^2+5x+9\neq 0 \qquad (\forall x)$.

1) $a\neq 1$; $D=(5a-4)^2-4\cdot 9\,(a-1)^2=$

$=(5a-4+6\,(a-1))\,(5a-4-6\,(a-1))=$

$=(11a-10)\,(2-a)$.



Распределение знаков дискриминанта:

а) $D>0$, при $a\in\left(\frac{10}{11};1\right)\cup(1;2)$ $\exists$ $x_1\neq x_2$;

б) $a=\frac{10}{11}$ – $\exists$ единственный корень;

в) $a=2$ – $\exists$ единственный корень.

2) $a=1$; $0\cdot x^2+x+9\cdot 0=0$; $x=0$.

Ответ: при $a\in\left[\frac{10}{11};2\right]$ уравнение $\frac{x^2+4x+9}{x^2+5x+9}=a$ имеет хотя бы одно решение.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнения $\frac{2x}{x+5a}=5a$ и $\frac{10a}{x+5a}=x$ имеют хотя бы один общий корень.

Пусть $x\neq -5a$, тогда $2x=5ax+25a^2$ и $10a=x^2+5ax$;

$(2-5a)\,x=25a^2$.

$2-5a\neq 0$, тогда $x=\frac{25a^2}{2-5a}$.

Подставляя его во второе уравнение, получим

$$10a = \left(\frac{25a^2}{2-5a}\right)^2 + \frac{5a \cdot 25a^2}{2-5a};$$

$$10a\left(2-5a\right)^2 = 625a^4 + 125a^3\left(2-5a\right);$$

$$10a\left(4-20a+25a^2\right) = 625a^4 + 250a^3 - 625a^4;$$

$$40a - 200a^2 + \underline{250a^3} = \underline{250a^3};\ 40a\left(1-5a\right) = 0;\ \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 0{,}2 \end{array}\right..$$

а) $a = 0$; тогда первое уравнение имеет вид $\dfrac{2x}{x} = 0$;

$x \in \varnothing$; второе уравнение имеет вид $\dfrac{0}{x} = x$; $x \in \varnothing$.
Общих корней нет.

б) $a = 0{,}2$; тогда первое уравнение имеет вид

$\dfrac{2x}{x+1} = 1$; $2x = x + 1$; $x = 1$.

Второе уравнение имеет вид

$\dfrac{2}{x+1} = x$; $x^2 + x - 2 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

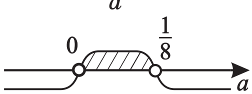
Итак, $x = 1$ – общий корень, $x \neq -5a$.

Ответ: при $a = 0{,}2$ уравнения имеют общий корень.

6. При каких значениях параметра $a \neq 0$ абсциссы всех общих точек графиков функций $f\left(x\right) = \dfrac{7}{x^2+8x}$ и $g\left(x\right) = \dfrac{7a}{x}$ положительны?

$f\left(x\right) = g\left(x\right)$; $\dfrac{7}{x^2+8x} = \dfrac{7a}{x}$; $\dfrac{7-7a\left(x+8\right)}{x\left(x+8\right)} = 0$;

$x + 8 = \dfrac{1}{a}$ $\left(x \neq -8;\ x \neq 0\right)$; $x = \dfrac{1-8a}{a} > 0$,



т.е. при $a \in \left(0; \dfrac{1}{8}\right)$.

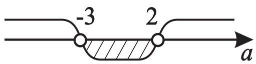
Ответ: при $a \in \left(0, \dfrac{1}{8}\right)$ абсциссы общих точек графиков $f\left(x\right) = \dfrac{7}{x^2+8x}$ и $g\left(x\right) = \dfrac{7a}{x}$ будут положительны.

7. При каких значениях параметра $a \neq -6$ абсциссы всех общих точек графиков функций $f(x) = x^2 + 6x + a^2$ и $g(x) = x^2 - ax + 36$ больше a^2?

Пусть $f(x) = g(x)$; тогда $x^2 + 6x + a^2 = x^2 - ax + 36$;

$(a+6)\,x = 36 - a^2$. Так как $a \neq -6$, то $x = 6 - a > a^2$, т.е.

$a^2 + a - 6 < 0$;



$a \in (-3;\, 2)$.

Ответ: при $a \in (-3;\, 2)$ абсциссы общих точек графиков $f(x) = x^2 + 6x + a^2$ и $g(x) = x^2 - ax + 36$ больше a^2.

8. Найдите все значения параметра b, при которых отношение дискриминанта уравнения $bx^2 + 3x + 5 = 0$ к квадрату разности его корней равно $5b + 6$.

$D = 3^2 - 4 \cdot b \cdot 5 = 9 - 20b$

$D > 0$; $\quad b < \dfrac{9}{20}$ $\quad$ и $\quad b \neq 0$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-3+\sqrt{9-20b}}{2b} \\ x = \dfrac{-3-\sqrt{9-20b}}{2b} \end{array}\right.$, тогда

$$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{9-20b}}{b}, \text{ т.е. } (x_1 - x_2)^2 = \frac{9-20b}{b^2}.$$

Тогда $\dfrac{D}{(x_1 - x_2)^2} = 5b + 6$, т.е. $(9 - 20b) : \left(\dfrac{9-20b}{b^2}\right) = 5b + 6$.

Значит $b^2 = 5b + 6$; $b^2 - 5b - 6 = 0$. Получим уравнение относительно b $\left[\begin{array}{l} b = 6 \\ b = -1 \end{array}\right.$.

Отметим, что при $b = 6$ $\quad D < 0$, т.е. $x \notin \mathbb{R}$.

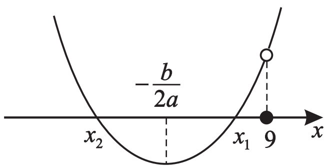
Ответ: при $b = -1$ отношение дискриминанта уравнения к квадрату разности корней уравнения $bx^2 + 3x + 5 = 0$ равно $5b + 6$.

9. Найдите все значения параметра a, при которых больший корень уравнения

$x^2 - (14a - 9)\,x + 49a^2 - 63a + 20 = 0$ меньше 9.

Графически это можно изобразить так:

если $f(x) = x^2 - (14a - 9)\,x + 49a^2 - 63a + 20$,

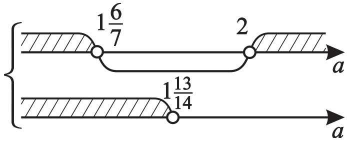


то $\begin{cases} f(9) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < 9 \\ D > 0 \end{cases}$, значит

$$\begin{cases} 9^2 - (14a - 9)\,9 + 49a^2 - 63a + 20 > 0 \\ \dfrac{14a-9}{2} < 9 \\ (14a - 9)^2 - 4\left(49a^2 - 63a + 20\right) > 0 \end{cases}, \text{ тогда}$$

$$\begin{cases} 49a^2 - 189a + 182 > 0 \\ a < \dfrac{27}{14} \\ \underline{196a^2} - \underline{\underline{252a}} + 81 - \underline{196a^2} + \underline{\underline{252a}} - 80 > 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 7a^2 - 27a + 26 > 0 \\ a < \dfrac{27}{14} \\ 1 > 0 \end{cases}; \quad a_{1,2} = \frac{27 \pm \sqrt{729 - 26 \cdot 28}}{14} = \frac{27 \pm 1}{14}; \quad \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = \dfrac{13}{7} \end{array}\right.;$$



$a < 1\dfrac{6}{7}$.

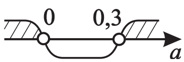
Ответ: при $a < 1\dfrac{6}{7}$ больший корень уравнения

$x^2 - (14a - 9)\,x + 49a^2 - 63a + 20 = 0$ меньше 9.

10. Найдите все значения параметра a, при которых больший корень уравнения $x^2-(20a-3)\,x+100a^2-30a=0$ в 6 раз больше, чем его меньший корень.

$6x_2=x_1$ по условию, тогда, учитывая теорему Виета,

имеем $\begin{cases} x_1\cdot x_2=6x_2^2=100a^2-30a>0 \\ x_1+x_2=7x_2=20a-3 \end{cases}$.



$a\in(-\infty;0)\cup(0{,}3;\infty)$.

Получим $\begin{cases} x_2^2=\dfrac{100a^2-30a}{6} \\ x_2^2=\left(\dfrac{20a-3}{7}\right)^2 \end{cases}$. Тогда $\dfrac{100a^2-30a}{6}=\dfrac{400a^2-120a+9}{49}$;

$49\left(50a^2-15a\right)=1200a^2-360a+27$;

$2450a^2-735a-1200a^2+360a-27=0$;

$1250a^2-375a-27=0$;

$$a_{1,2}=\frac{375\pm\sqrt{75^2\cdot5^2+27\cdot8\cdot25^2}}{2500}=\frac{375\pm75\sqrt{25+24}}{2500};$$

$$\left[\begin{aligned} a&=\frac{375+75\cdot7}{2500} \\ a&=\frac{375-75\cdot7}{2500} \end{aligned}\right.;\quad \left[\begin{aligned} a&=0{,}36\in(0{,}3;\infty) \\ a&=-0{,}06\in(-\infty;0) \end{aligned}\right..$$

Ответ: при $a\in\{-0{,}06;0{,}36\}$ больший корень уравнения $x^2-(20a-3)\,x+100a^2-30a=0$ в 6 раз больше, чем его меньший корень.

Примечание.

Можно решить иначе, если сразу найти корни исходного уравнения, но тогда необходима проверка.

а) $x_1=10a$; $x_2=10a-3$. Тогда $6\,(10a-3)=10a$; $a=0{,}36$.

б) $x_1=10a-3$; $x_2=10a$. Тогда $60a=10a-3$; $50a=-3$; $a=-0{,}06$.

В данном случае такой способ проще, так как корни рационально выражаются через a.

11. Найдите все значения параметра b, при которых функция $g\left(x\right)=\frac{2x^2+7x+7}{12x^2-\left(9b-8\right)x+12}$ определена на всей числовой оси и принимает только положительные значения.

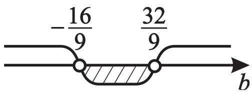
Так как $2x^2+7x+7>0$ для $\forall x$ из-за $\begin{cases}2>0\\ D=49-56<0\end{cases}$,

то знак функции зависит только от знаменателя.

Чтобы знак был положительным, необходимо, чтобы

$$D=\left(9b-8\right)^2-4\cdot 12^2<0 \quad \left(a=12>0\right);$$

$$\left(9b-8+24\right)\left(9b-8-24\right)<0,\ \left(9b+16\right)\left(9b-32\right)<0.$$



$b\in\left(-\frac{16}{9};\frac{32}{9}\right)$.

Значит при $b\in\left(-\frac{16}{9};\frac{32}{9}\right)$

$12x^2-\left(9b-8\right)x+12>0$ $(\forall x)$,

тогда $g\left(x\right)>0$ для $\forall x\in\left(-\infty;\infty\right)$.

Ответ: при $b\in\left(-1\frac{7}{9};3\frac{5}{9}\right)$ функция $g\left(x\right)=\frac{2x^2+7x+7}{12x^2-\left(9b-8\right)x+12}$ определена на всей числовой оси и принимает только положительные значения.

12. Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения $\left(x-6a\right)^2+\left(x-2a\right)^2=128$ симметричны относительно точки $x=12$.

После преобразований получим

$x^2-12ax+36a^2+x^2-4ax+4a^2=128$;

$x^2-8ax+20a^2-64=0$.

Так как $\begin{matrix}x_1=12+t\\ x_2=12-t\end{matrix}$,

корни симметричны относительно числа 12.

Тогда $x_1 + x_2 = 24$; с другой стороны, по теореме Виета $x_1 + x_2 = 8a$, значит $24 = 8a$, т.е. $a = 3$.

Проверим, будут ли корни при $a = 3$ симметричны относительно числа 12.

Пусть $a = 3$. Тогда $x^2 - 24x + 20 \cdot 9 - 64 = 0$;

$x^2 - 24x + 116 = 0$; $x_{1,2} = 12 \pm \sqrt{144 - 116}$,

т.е. $x_{1,2} = 12 \pm 2\sqrt{7}$.

Действительно, $\left[\begin{array}{l} x = 12 + 2\sqrt{7} \\ x = 12 - 2\sqrt{7} \end{array}\right.$ – условия выполнены.

Ответ: при $a = 3$ корни уравнения $(x - 6a)^2 + (x - 2a)^2 = 128$ симметричны относительно точки $x = 12$.

13. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|4x + 9a + 5| = |10x + 8a - 3|$ имеет два различных корня, равноудалённых от точки $x = 5$.

Уравнение $|4x + 9a + 5| = |10x + 8a - 3|$ равносильно $(4x + 9a + 5)^2 = (10x + 8a - 3)^2$, т.е.

$(4x + 9a + 5 + 10x + 8a - 3)(4x + 9a + 5 - 10x - 8a + 3) = 0$.

Значит $\left[\begin{array}{l} 14x + 17a + 2 = 0 \\ -6x + a + 8 = 0 \end{array}\right.$.

Так как $\begin{array}{l} x_1 = 5 + t \\ x_2 = 5 - t \end{array}$, то $\frac{x_1 + x_2}{2} = 5$, но $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{17a+2}{14} \\ x = \frac{a+8}{6} \end{array}\right.$,

значит $-\frac{17a+2}{14} + \frac{a+8}{6} = 10$; $-3(17a + 2) + 7(a + 8) = 420$;

$-51a - 6 + 7a + 56 = 420$; $44a = -370$; $a = -\frac{370}{44}$; $a = -8\frac{9}{22}$.

Это можно проверить:

$$x_1 = -\frac{17\cdot\left(-8\frac{9}{22}\right)+2}{14}; \quad x_1 = 10\frac{3}{44};$$

$$x_2 = \frac{-8\frac{9}{22}+8}{6}; \quad x_2 = -\frac{3}{44}.$$

Действительно, $\frac{x_1+x_2}{2} = 5$,
что требовалось доказать.

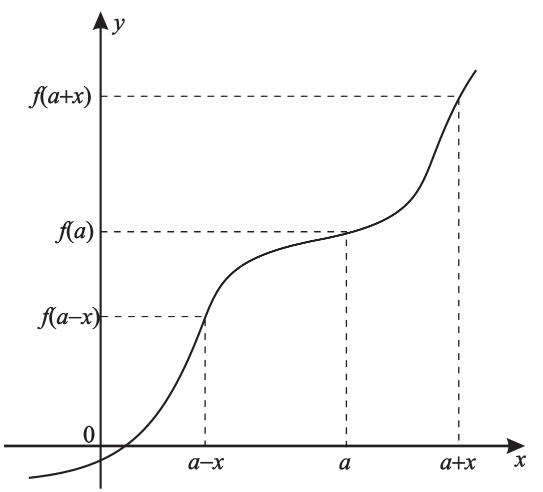
Ответ: при $a = -8\frac{9}{22}$ уравнение $\left|4x+9a+5\right| = \left|10x+8a-3\right|$ имеет два различных корня, равноудалённых от точки $x = 5$.

14. Есть ли на графике функции $y = 2x^2\left(x+1\right)$ точка A, относительно которой график функции центрально-симметричен?

Условие центральной симметрии $y = f\left(x\right)$ относительно $A\left(a; f\left(a\right)\right)$ означает, что

$$f\left(a+x\right) - f\left(a\right) = f\left(a\right) - f\left(a-x\right)$$

или $f\left(a+x\right) + f\left(a-x\right) = 2f\left(a\right)$.



$$+\left.\begin{array}{l} f(a+x)=2(a+x)^2(a+x+1) \\ f(a-x)=2(a-x)^2(a-x+1) \end{array}\right| \Rightarrow f(a+x)+f(a-x)=$$

$$=2\left[(a+x)^3+(a+x)^2\right]+2\left[(a-x)^3+(a-x)^2\right]=$$

$$=2a^3+6a^2x+6ax^2+2x^3+2a^2+2x^2+4ax+$$

$$+2a^3-6a^2x+6ax^2-2x^3+2a^2+2x^2-4ax=$$

$$\left.\begin{array}{l} =4a^3+12ax^2+4a^2+4x^2, \\ \text{но}\quad 2f(a)=2\left[2a^2(a+1)\right]=4a^3+4a^2 \end{array}\right|.$$

Тогда

$$4a^3+12ax^2+4a^2+4x^2=4a^3+4a^2.$$

Значит $12ax^2+4x^2=0$;

$4x^2(3a+1)=0$, т.е. при $a=-\frac{1}{3}$

$f\left(-\frac{1}{3}\right)=2\cdot\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{4}{27}$. Таким образом определили координаты точки $A\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{27}\right)$.

Ответ: $A\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{27}\right)$ – точка, относительно которой график функции $y=2x^2(x+1)$ центрально-симметричен.

15. При каких значениях параметра a существуют только два различных корня уравнения

$$\frac{x^3+(a-1)x^2-\left(2a^2+a\right)x+2a^2}{x-2}=0 \text{ и какие?}$$

Решим уравнение $f(x)=0$, где

$$x^3+(a-1)x^2-\left(2a^2+a\right)x+2a^2=f(x);$$

$$f(a)=a^3+(a-1)a^2-\left(2a^2+a\right)a+2a^2=$$

$$=a^3+a^3-a^2-2a^3-a^2+2a^2=0.$$

Значит $f(x)\,\vdots\,(x-a)$, тогда числитель уравнения примет вид:

$$(x-a)\left(x^2+(2a-1)x-2a\right)=0.$$

$$x^2+(2a-1)x-2a=0;$$

$$D=(2a-1)^2+8a=(2a+1)^2;$$

$$x_{1,2}=\frac{1-2a\pm(2a+1)}{2};\quad \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2a \end{array}\right..$$

Итак, уравнение будет иметь вид $\dfrac{(x-a)(x-1)(x+2a)}{x-2}=0$.

Чтобы было только два различных корня, необходимо чтобы либо один из корней числителя совпал с корнем знаменателя, либо какие-то два корня числителя совпали и корни числителя не обращали знаменатель в ноль, что возможно, если:

а) $\begin{cases} x-a=0 \\ x-2=0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x-a=0 \\ x-1=0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x-a=0 \\ x+2a=0 \\ x-2\neq 0 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x+2a=0 \\ x-2=0 \end{cases}$; д) $\begin{cases} x+2a=0 \\ x-1=0 \end{cases}$,

тогда $\left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=1 \\ a=0 \\ 2a=-2 \\ 2a=-1 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=1 \\ a=0 \\ a=-1 \\ a=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

а) $a=2$; $\dfrac{(x-2)(x-1)(x+4)}{x-2}=0$; $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-4 \end{array}\right.$;

б) $a=1$; $\dfrac{(x-1)(x-1)(x+2)}{x-2}=0$; $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$;

в) $a=0$; $\dfrac{x(x-1)x}{x-2}=0$; $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \end{array}\right.$;

г) $a = -1$; $\dfrac{(x+1)(x-1)(x-2)}{x-2} = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$;

д) $a = -\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)(x-1)}{x-2} = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Ответ: уравнение $\dfrac{x^3+(a-1)x^2-\left(2a^2+a\right)x+2a^2}{x-2} = 0$ имеет два корня при

1) $a = 2$ $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -4 \end{array}\right.$;

2) $a = 1$ $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$;

3) $a = 0$ $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \end{array}\right.$;

4) $a = -1$ $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$;

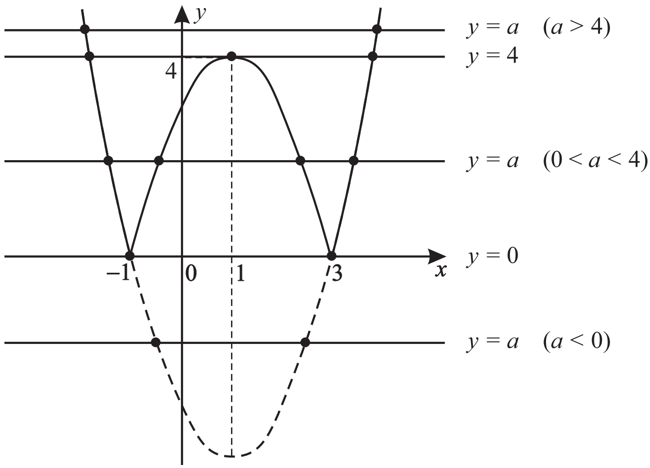
5) $a = -\dfrac{1}{2}$ $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

16. Сколько корней имеет уравнение $\left|x^2 - 2x - 3\right| = a$ в зависимости от значения параметра a?

Решим вопрос графически.

Построим $y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$. Имеем сдвиг графика $y = x^2$ вправо на единицу и вниз на 4.

Для того чтобы построить график $y = \left|f(x)\right|$, необходимо часть графика, находящуюся в верхней полуплоскости, сохранить, а часть графика, находящуюся в нижней полуплоскости, симметрично отразить в верхнюю полуплоскость.



Ответ: в уравнении $\left|x^2-2x-3\right|=a$, если

1) $a=0$, то $\exists$ два корня;
2) $a\in(0;4)$, то $\exists$ четыре корня;
3) $a=4$, то $\exists$ три корня;
4) $a\in(4;\infty)$, то $\exists$ два корня;
5) $a\in(-\infty;0)$, то корней нет.

17. При каких значениях параметра a существует только одна общая точка для графиков функций $y=x^2-2x-3$ и $y=ax^2$?

Это значит, что уравнение имеет только один корень.

$x^2-2x-3=ax^2;(1-a)\,x^2-2x-3=0.$

а) $a\neq1$;

$D=1+3\,(1-a)=4-3a$; $D=0$; $a=\dfrac{4}{3}$,

тогда $x_1=x_2=-3$.

Итак, при $a=\dfrac{4}{3}$ $\exists$ единственный корень, т.е. при $a = \frac{4}{3}$ существует только одна общая точка

$$x_1 = x_2 = \frac{1 \pm 0}{1 - \frac{4}{3}} = -3 \cdot$$

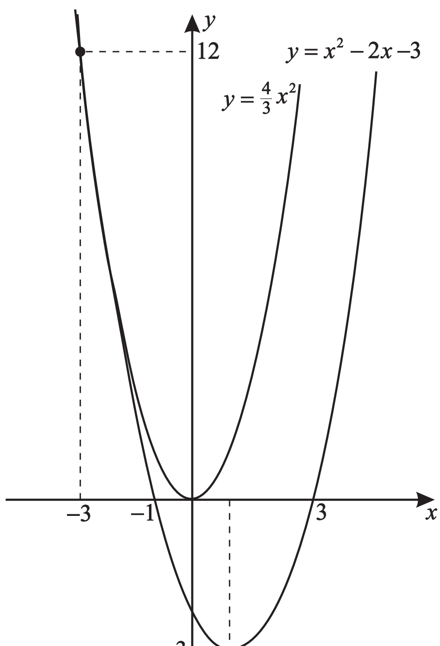
б) $a = 1$;

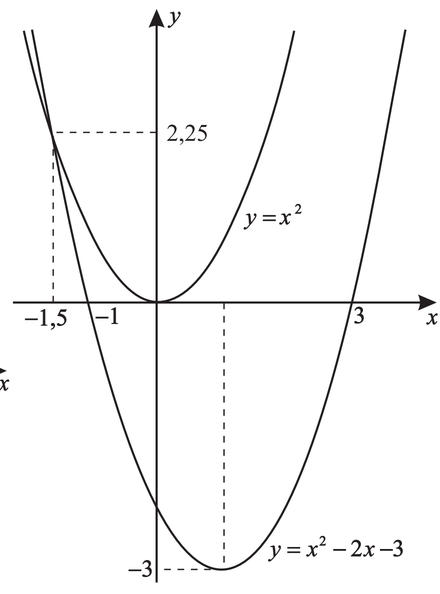
$2x + 3 = 0$; $x = -1{,}5$;

$f\left(-1{,}5\right) = 2{,}25$.

Ответ: при $a \in \left\{1;\ 1\frac{1}{3}\right\}$ существует только одна общая точка для графиков функций $y = x^2 - 2x - 3$ и $y = ax^2$.

Графическая иллюстрация решения задачи приведена ниже.





Тренировочная работа 1

1. Сколько различных корней имеет уравнение $2x^2(x+1)=kx$ в зависимости от значения параметра k?

2. Сколько различных корней имеет уравнение $(x+3)(x+1)(x-2)=k(x+1)$ в зависимости от значений параметра k?

3. Для каждого значения параметра a найдите число корней уравнения $2(4x-1)a^2-(14x-11)a+5(x-1)=0$.

4. Найти все значения параметра a, при которых уравнения $x^2+4x-3a+7=0$ и $x^2+7x-5a+15=0$ имеют хотя бы один общий корень.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнения $\frac{3x}{x+2a}=2a$ и $\frac{6a}{x+2a}=x$ имеют хотя бы один общий корень.

6. Сколько корней имеет уравнение $\frac{x^2}{x^2-2x-3}=a$ в зависимости от значения параметра a?

7. При каких значениях параметра $a\neq 4$ абсциссы всех общих точек графиков функций $f(x)=x^2+8x+4a^2$ и $g(x)=x^2+2ax+64$ не больше a^2?

8. Найдите все значения параметра a, при которых больший корень уравнения $x^2-(8a-7)x+16a^2-28a=0$ в 10 раз больше, чем его меньший корень.

9. Найдите все значения параметра a, при которых больший корень уравнения $x^2-(14a-3)x+49a^2-21a+2=0$ меньше -8.

10. Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения $(x-2a)^2+(x-4a)^2=242$ симметричны относительно точки $x=-3$.

11. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|10x+7a-5|=|3x+2a-1|$ имеет два различных корня, равноудалённых от точки $x=-7$.

12. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $x^4+(36-2p)x^2-12px+2p^2=0$ имеет рациональные корни.

Решение тренировочной работы 1

1. Сколько различных корней имеет уравнение $2x^2\left(x+1\right)=kx$ в зависимости от значений параметра k?

$2x^2\left(x+1\right)=kx$; $x\left(2x^2+2x-k\right)=0$. Один корень есть всегда: $x_0=0$.

Исследуем $2x^2+2x-k=0$. $D=1+2k$;

а) $k=-\dfrac{1}{2}$; $x_1=x_2=-\dfrac{1}{2}$;

б) $D>0$; $k>-\dfrac{1}{2}$ $\exists$ два корня, правда, хотелось бы, чтобы они не совпали с $x_0=0$. Это возможно, если $D=1$; $1+2k=1$; $k=0$;

в) $D<0$; $k<-\dfrac{1}{2}$ – корней нет.

Ответ: в уравнении $2x^2\left(x+1\right)=kx$ при

1) $k=-\dfrac{1}{2}$ $\exists$ два корня;

2) $k<-\dfrac{1}{2}$ $\exists$ один корень;

3) $k=0$ $\exists$ два корня;

4) $k\in\left(-\dfrac{1}{2};0\right)\cup\left(0;\infty\right)$ $\exists$ три корня.

2. Сколько различных корней имеет уравнение $\left(x+3\right)\left(x+1\right)\left(x-2\right)=k\left(x+1\right)$ в зависимости от значений параметра k?

$\left(x+3\right)\left(x+1\right)\left(x-2\right)=k\left(x+1\right)$ – один корень есть всегда.

$\left(x+1\right)\left[\left(x+3\right)\left(x-2\right)-k\right]=0$; $x_0=-1$;

$\left(x+1\right)\left(x^2+x-6-k\right)=0$.

Исследуем $x^2+x-6-k=0$. $D=1^2+4\left(6+k\right)=25+4k$;

а) $D = 0$; $k = -\dfrac{25}{4}$; $x_1 = x_2 = -\dfrac{1}{2}$.

б) $D > 0$; $\exists$ два корня $x_{1,2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{25+4k}}{2}$, но хотелось бы,

чтобы эти корни не совпадали. Так как $x_0 = -1$,

значит $D \neq 1$. Выясним, при каких k это возможно.

$25 + 4k = 1$; $k \neq -6$;

в) $D < 0$; корней нет; $k < -\dfrac{25}{4} = -6{,}25$.

Ответ: в уравнении $(x+3)(x+1)(x-2) = k(x+1)$ при

1) $k < -6{,}25$ $\exists$ один корень;

2) $k = -6{,}25$ $\exists$ два корня;

3) $k = -6$ $\exists$ два корня;

4) $k \in (-6{,}25; -6) \cup (-6; \infty)$ $\exists$ три корня.

3. Для каждого значения параметра a найдите число решений уравнения $2(4x-1)a^2 - (14x-11)a + 5(x-1) = 0$.

$\underline{8a^2x} - 2a^2 - \underline{14ax} + 11a + \underline{5x} - 5 = 0$;

$(8a^2 - 14a + 5)\, x = 2a^2 - 11a + 5$;

а) $8a^2 - 14a + 5 = 0$; $a_{1,2} = \dfrac{7\pm\sqrt{49-40}}{8} = \dfrac{7\pm3}{8}$; $\left[\begin{array}{l} a = \dfrac{5}{4} \\ a = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$;

$8a^2 - 14a + 5 = (4a-5)(2a-1)$;

б) $2a^2 - 11a + 5 = 0$; $a_{1,2} = \dfrac{11\pm\sqrt{121-40}}{4} = \dfrac{11\pm9}{4}$ $\left[\begin{array}{l} a = 5 \\ a = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$;

$2a^2 - 11a + 5 = (2a-1)(a-5)$.

Итак, уравнение приобретает вид

$(4a-5)(2a-1)\, x = (2a-1)(a-5)$.

а) $\begin{cases} a \neq \frac{1}{2} \\ a \neq \frac{5}{4} \end{cases}$, $\exists$ единственное решение $x = \frac{a-5}{4a-5}$;

б) $a = \frac{1}{2}$, тогда $0 \cdot x = 0$, т.е. $\forall x$ – решение;

в) $a = \frac{5}{4}$, $0 \cdot x = 1{,}5 \cdot 3{,}75$, $x \in \varnothing$.

Ответ: 1) $\begin{cases} a \neq \frac{1}{2} \\ a \neq \frac{5}{4} \end{cases}$, $\exists$ единственное решение $x = \frac{a-5}{4a-5}$;

2) $a = \frac{1}{2}$ – бесконечное множество решений;

3) $a = \frac{5}{4}$ – решения нет.

4. Найти все значения параметра a, при которых уравнения $x^2 + 4x - 3a + 7 = 0$ и $x^2 + 7x - 5a + 15 = 0$ имеют хотя бы один общий корень.

Вычтем одно уравнение из другого и получим

$3x - 2a + 8 = 0$, т.е. $x = \frac{2a-8}{3}$ подставим в любое из уравнений.

$$\left(\frac{2a-8}{3}\right)^2 + 4\,\frac{(2a-8)}{3} - 3a + 7 = 0;$$

$$4a^2 - 32a + 64 + 12\,(2a - 8) - 27a + 63 = 0;$$

$$4a^2 - 35a + 31 = 0; \; a_{1,2} = \frac{35 \pm \sqrt{1225 - 496}}{8} = \frac{35 \pm 27}{8}; \; \left[\begin{array}{l} a = 7{,}75 \\ a = 1 \end{array}\right. .$$

При желании проверки убеждаемся, что для двух уравнений существует общий корень.

Ответ: при $a = 7{,}75$ и $a = 1$ уравнения $x^2 + 4x - 3a + 7 = 0$ и $x^2 + 7x - 5a + 15 = 0$ имеют хотя бы один общий корень.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнения $\frac{3x}{x+2a} = 2a$ и $\frac{6a}{x+2a} = x$ имеют хотя бы один общий корень.

Пусть $x \neq -2a$ $\left(D\left(y\right)\right)$, тогда $3x = 2ax + 4a^2$ и $6a = x^2 + 2ax$.

Из первого уравнения $\left(3-2a\right)x = 4a^2$, т.е. если $a \neq 1{,}5$, то $x = \frac{4a^2}{3-2a}$ (при $a = 1{,}5$ – $0 = 9$).

Подставляя значение x во второе уравнение, получим

$$6a = \left(\frac{4a^2}{3-2a}\right)^2 + \frac{2a \cdot 4a^2}{3-2a};$$

$$6a\left(3-2a\right)^2 = 8a^3\left(3-2a\right) + 16a^4;$$

$$6a\left(9-12a+4a^2\right) = 24a^3 - \underline{16a^4} + \underline{16a^4};$$

$$54a - 72a^2 + \underline{24a^3} = \underline{24a^3}; \quad 18a\left(3-4a\right) = 0; \quad \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = \frac{3}{4} \end{array}\right..$$

а) Пусть $a = 0$, тогда $\frac{3x}{x} = 0$; $x \in \varnothing$; $\frac{0}{x} = x$; $x \in \varnothing$.

б) Пусть $a = \frac{3}{4}$, тогда $\frac{3x}{x+1{,}5} = 1{,}5$; $3x = 1{,}5x + 2{,}25$,

значит $1{,}5x = 2{,}25$ и $\frac{4{,}5}{x+1{,}5} = x$; $4{,}5 = x^2 + 1{,}5x$; $x = 1{,}5$

и $2x^2 + 3x - 9 = 0$; $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{4} = \frac{-3 \pm 9}{4}$; $\left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 1{,}5 \end{array}\right.,$

Значит $x = 1{,}5$ – общий корень.

Ответ: при $a = 0{,}75$ есть общий корень для уравнений

$$\frac{3x}{x+2a} = 2a \text{ и } \frac{6a}{x+2a} = x.$$

6. Сколько корней имеет уравнение $\dfrac{x^2}{x^2-2x-3}=a$ в зависимости от значения параметра a?

1) Так как $D(y)$: $x^2-2x-3\neq 0$, т.е. $\begin{cases} x\neq 3 \\ x\neq -1 \end{cases}$,

то $x^2=a\left(x^2-2x-3\right)$.

Выясним, при каких значениях параметра a уравнение имеет корни $x=3$ и $x=-1$, и исключим эти значения параметра a.

а) Пусть $x=3$, тогда $9=a\cdot 0$ – ложь.

Такого корня нет при любых значениях параметра a.

б) Пусть $x=-1$, тогда $1=a\cdot 0$ – ложь,

значит и в этом случае такого корня нет при любых значениях параметра a.

2) После преобразований уравнение примет вид

$(a-1)\,x^2-2ax-3a=0$.

а) Пусть $a\neq 1$, тогда $D=a^2+3a\,(a-1)=4a^2-3a=$

$=a\,(4a-3)$; 

$D>0$ при $a\in(-\infty;0)\cup(0{,}75;1)\cup(1;\infty)$, тогда

$x_{1,2}=\dfrac{a\pm\sqrt{a\cdot(4a-3)}}{a-1}$ – есть два корня.

б) $a=0$, тогда $x=0$ – один корень.

в) $a=0{,}75$, тогда $x=-1\ 2$ – один корень.

г) $a=1$, тогда $0\cdot x^2-2x-3=0$; $x=-1{,}5$ – один корень.

Ответ: уравнение $\dfrac{x^2}{x^2-2x-3}=a$ имеет при

1) $a\in(-\infty;\,0)\cup(0{,}75;\,1)\cup(1;\,\infty)$ – два корня;

2) $a=0$ – один корень;

3) $a=0{,}75$ – один корень;

4) $a=1$ – один корень;

5) $a\in(0;\,0{,}75)$ – корней нет.

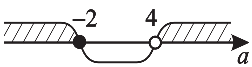
7. При каких значениях параметра $a \neq 4$ абсциссы всех общих точек графиков функций $f(x) = x^2 + 8x + 4a^2$ и $g(x) = x^2 + 2ax + 64$ не больше a^2?

Найдем абсциссу общих точек, где $f(x) = g(x)$.

$x^2 + 8x + 4a^2 = x^2 + 2ax + 64$; $2(4 - a)x = 64 - 4a^2$.

Так как $a \neq 4$, то $x = \dfrac{-4(16-a^2)}{2(a-4)}$.

Значит $x = 2(4 + a) \leqslant a^2$; $a^2 - 2a - 8 \geqslant 0$.



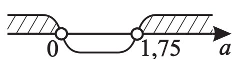
$a \in (-\infty; -2] \cup (4; \infty)$.

Ответ: при $a \in (-\infty; -2] \cup (4; \infty)$ абсциссы всех общих точек графиков $f(x) = x^2 + 8x + 4a^2$ и $g(x) = x^2 + 2ax + 64$ не больше a^2.

8. Найдите все значения параметра a, при которых больший корень уравнения $x^2 - (8a - 7)x + 16a^2 - 28a = 0$ в 10 раз больше, чем его меньший корень.

По условию $10x_2 = x_1$, тогда, учитывая теорему Виета, получим систему

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 10x_2^2 = 16a^2 - 28a > 0 \\ x_1 + x_2 = 11x_2 = 8a - 7 \end{cases}$$



$$\left[\begin{array}{l} a < 0 \\ a > 1{,}75 \end{array}\right..$$

Тогда $\begin{cases} x_2^2 = \dfrac{16a^2 - 28a}{10} \\ x_2 = \dfrac{8a-7}{11} \end{cases}$. Значит $\left(\dfrac{8a-7}{11}\right)^2 = \dfrac{16a^2-28a}{10}$.

$10(64a^2 - 112a + 49) = 121(16a^2 - 28a)$;

$640a^2 - 1120a + 490 = 1936a^2 - 3388a$;

$1296a^2 - 2268a - 490 = 0$; $648a^2 - 1134a - 245 = 0$;

$$a_{1,2}=\frac{567\pm\sqrt{567^2+648\cdot245}}{648}=\frac{567\pm\sqrt{81^2\cdot7^2+7^2\cdot5\cdot81\cdot8}}{81\cdot8}=$$

$$=\frac{81\cdot7\pm9\cdot7\sqrt{81+40}}{648}=\frac{81\cdot7\pm9\cdot7\cdot11}{81\cdot8};$$

$$\left[\begin{aligned}a&=\frac{7(9+11)}{9\cdot8}\\ a&=\frac{7(9-11)}{9\cdot8}\end{aligned}\right.;\quad \left[\begin{aligned}a&=\frac{35}{18}\\ a&=-\frac{7}{36}\end{aligned}\right.;$$

$$\frac{35}{18}\in(1{,}75;\infty);\ -\frac{7}{36}\in(-\infty;0)\cup(1{,}75;\infty).$$

Ответ: при $a\in\left\{-\frac{7}{36};1\frac{17}{18}\right\}$ больший корень уравнения $x^2-(8a-7)x+16a^2-28a=0$ в 10 раз больше, чем его меньший корень.

Примечание. Можно проще.

$D=(8a-7)^2-4(16a^2-28a)=64a^2-112a+49-64a^2+112a=49>0;$

$x_{1,2}=\frac{8a-7\pm7}{2};\ x_1=4a$ и $x_2=4a-7.$

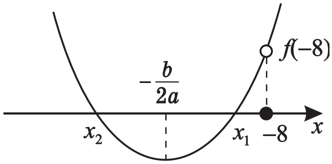
а) $x_1=10x_2;\ 4a=40a-70;\ 36a=70;\ a=\frac{35}{18};$

б) $x_2=10x_1;\ 40a=4a-7;\ 36a=-7;\ a=-\frac{7}{36}.$

9. Найдите все значения параметра a, при которых больший корень уравнения

$x^2-(14a-3)x+49a^2-21a+2=0$ меньше -8.

Графически это выглядит так,



что соответствует $\begin{cases}f(-8)>0\\ -\frac{b}{2a}<-8\\ D>0\end{cases}$,

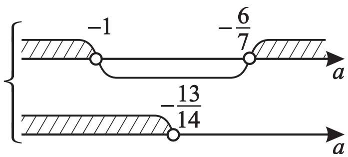
где $f(x)=x^2-(14a-3)x+49a^2-21a+2=0.$

Получим систему неравенств

$$\begin{cases} 8^2+(14a-3)\cdot 8+49a^2-21a+2>0 \\ \frac{14a-3}{2}<-8 \\ (14a-3)^2-4\left(49a^2-21a+2\right)>0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 49a^2+91a+42>0 \\ a<-\frac{13}{14} \\ 196a^2-84a+9-196a^2+84a-8>0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 7a^2+13a+6>0 \\ a<-\frac{13}{14} \\ 1>0 \end{cases}. \quad a_{1,2}=\frac{-13\pm\sqrt{169-168}}{14}=\frac{-13\pm1}{14}; \quad \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=-\frac{6}{7} \end{array}\right..$$



$a<-1$.

Ответ: при $a<-1$ больший корень уравнения
$x^2-(14a-3)\,x+49a^2-21a+2=0$ меньше -8.

10. Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения $(x-2a)^2+(x-4a)^2=242$ симметричны относительно точки $x=-3$.

После преобразований получим

$x^2-4ax+4a^2+x^2-8ax+16a^2=242$,

т.е. $x^2-6ax+10a^2-121=0$.

Так как $\begin{array}{l} x_1=-3+t \\ x_2=-3-t \end{array}$, то $x_1+x_2=-6$,

но по теореме Виета $x_1+x_2=6a$.

Значит $-6 = 6a$, т.е. $a = -1$. Проверим.

Пусть $a = -1$. Тогда уравнение примет вид:

$x^2 + 6x - 111 = 0$; $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9+111}$, т.е. $\begin{array}{l} x_1 = -3 + 2\sqrt{30} \\ x_2 = -3 - 2\sqrt{30} \end{array}$,

значит корни симметричны относительно числа -3.

Ответ: при $a = -1$ корни уравнения $(x-2a)^2 + (x-4a)^2 = 242$ симметричны относительно точки $x = -3$.

11. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|10x + 7a - 5| = |3x + 2a - 1|$ имеет два различных корня, равноудалённых от точки $x = -7$.

Уравнение $|10x + 7a - 5| = |3x + 2a - 1|$ равносильно

уравнению $(10x + 7a - 5)^2 = (3x + 2a - 1)^2$, т.е.

$(10x + 7a - 5 + 3x + 2a - 1)(10x + 7a - 5 - 3x - 2a + 1) = 0$;

$\left[\begin{array}{l} 13x + 9a - 6 = 0 \\ 7x + 5a - 4 = 0 \end{array}\right.$.

$x_1 = \frac{6-9a}{13}$; $x_2 = \frac{4-5a}{7}$, и так как $\frac{x_1+x_2}{2} = -7$,

то $\frac{6-9a}{13} + \frac{4-5a}{7} = -14$.

$7(6-9a) + 13(4-5a) = -14 \cdot 91$;

$42 - 63a + 52 - 65a = -1274$;

$128a = 1368$; $a = \frac{1368}{128}$; $a = 10\frac{11}{16}$.

Ответ: при $a = 10\frac{11}{16}$ уравнение $|10x + 7a - 5| = |3x + 2a - 1|$ имеет два корня, равноудалённых от точки $x = -7$.

12. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $x^4+(36-2p)\,x^2-12px+2p^2=0$ имеет рациональные корни.

В данном случае мы имеем уравнение 4-й степени относительно x, решать которое технически очень сложно. Заметим, что относительно p это уравнение квадратное, решать которое значительно проще.

$x^4-(36-2p)\,x^2-12px+2p^2=0$.

Перегруппируем и решим.

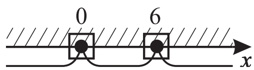
$2p^2-2p(x^2+6x)+36x^2+x^4=0$.

Используем формулу четного коэффициента:

$$(p)_{1,2}=\frac{x^2+6x\pm\sqrt{\left(x^2+6x\right)^2-72x^2-2x^4}}{2}=$$

$$=\frac{x^2+6x\pm\sqrt{-x^4+12x^3-36x^2}}{2}=\frac{x^2+6x\pm\sqrt{-\left(x^2-6x\right)^2}}{2}.$$

Так как $-\left(x^2-6x\right)^2\geqslant 0$, то решение возможно только при $\left[\begin{array}{l}x=0\in\mathbb{Q}\\ x=6\in\mathbb{Q}\end{array}\right.$.



Если $x=0$, тогда $p=0$.

Если $x=6$, тогда $p=\dfrac{36+36\pm 0}{2}=36$.

Ответ: при $p\in\{0;36\}$ уравнение
$x^4-(36-2p)\,x^2-12px+2p^2=0$ имеет рациональные корни.

Примечание. Подставляя в уравнение $p=0$ и $p=36$, убеждаемся, что корней, отличных от 0 и 6, нет.

2

Системы уравнений и неравенств[1]

Практикум 2

1. Для каждого значения параметра a решите систему уравнений: $\begin{cases} x + 7y = 2 \\ 3x + y = a \\ 5x + 11y = a^2 + 3a \end{cases}$.

$$\begin{cases} x = 2 - 7y \\ 3(2 - 7y) + y = a \\ 5(2 - 7y) + 11y = a^2 + 3a \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 2 - 7y \\ -20y = a - 6 \\ -24y = a^2 + 3a - 10 \end{cases}.$$

Исключив y из второго и третьего уравнений, для параметра можно написать уравнение $\frac{a-6}{20} = \frac{a^2+3a-10}{24}$.

Преобразуя, получим $6(a-6) = 5(a^2 + 3a - 10)$.

Тогда $5a^2 + 9a - 14 = 0$; $\left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -2{,}8 \end{array}\right.$.

а) Пусть $a = 1$. Значит так как $y = -\frac{a-6}{20}$, то $y = 0{,}25$, и так как $x = 2 - 7y$, то $x = 2 - 7 \cdot 0{,}25$; $x = 0{,}25$.

---

[1]Подробнее см. Шахмейстер А. Х. Уравнения и неравенства с параметрами. СПб.: «ЧеРо-на-Неве», 2006. Гл. 1, 2.

б) Пусть $a = -2{,}8$. Тогда так как $y = -\dfrac{a-6}{20}$,

то $y = -\dfrac{-2{,}8-6}{20}$, т.е. $y = 0{,}44$, и так как $x = 2 - 7y$,

то $x = 2 - 7\cdot(0{,}44)$, т.е. $x = -1{,}08$.

Ответ: в системе уравнений $\begin{cases} x + 7y = 2 \\ 3x + y = a \\ 5x + 11y = a^2 + 3a \end{cases}$

1) при $a = 1$ $\exists$ единственное решение $(0{,}25;\ 0{,}25)$;

2) при $a = -2{,}8$ $\exists$ единственное решение $(-1{,}08;\ 0{,}44)$;

3) при $\begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq -2{,}8 \end{cases}$ $(x_0; y_0) \in \varnothing$ (решений нет).

2. При каких значениях параметра a площадь $S_Ф$ фигуры, заданной системой неравенств

$\begin{cases} y^2 + x^2 - 2ax \leqslant 36 - a^2 \\ (x+2)^2 \leqslant 36 \end{cases}$, равна 18π?

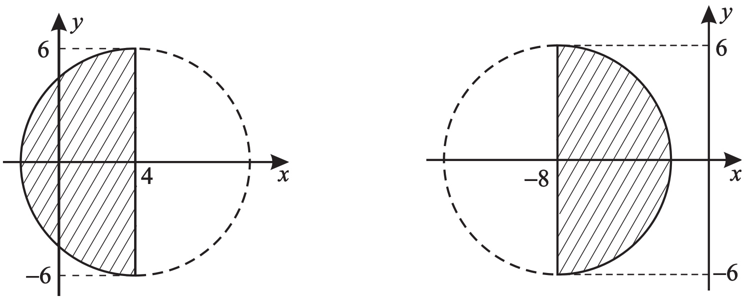
После преобразований систему неравенств можно переписать

$$\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 \leqslant 36 \\ x + 2 \leqslant 6 \\ x + 2 \geqslant -6 \end{cases}, \text{ т.е. } \begin{cases} (x-a)^2 + y^2 \leqslant 6^2 \\ x \leqslant 4 \\ x \geqslant -8 \end{cases}.$$

Тогда имеем в первом неравенстве системы круг радиуса $R = 6$, сдвинутый по оси абсцисс на величину $|a|$ вправо, если $a > 0$, и влево, если $a < 0$.

Так как $S_{кр} = \pi R^2$, то независимо от a $S_{кр} = 36\pi$ (кв. ед.), но в силу ограничений $-8 \leqslant x \leqslant 4$ $S_Ф = 18\pi$, только если центр круга имеет координаты $(4;\ 0)$ или $(-8;\ 0)$.

Значит, если $\left[\begin{array}{l} a=4 \\ a=-8 \end{array}\right.$, площадь фигуры равна 18π (кв. ед.).



Ответ: площадь фигуры, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} y^2+x^2-2ax \leqslant 36-a^2 \\ (x+2)^2 \leqslant 36 \end{cases},$$

равна 18π при $a=4$; при $a=-8$.

3. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \left(2a^2-7a\right)x-25y=2a^2-9a-50 \\ 6x-5y+3=0 \end{cases}$$

имеет не менее четырёх решений.

Преобразуя, имеем $\begin{cases} \left(2a^2-7a\right)x-25y=2a^2-9a-50 \\ 6x+3=5y \end{cases}$.

Тогда первое уравнение будет иметь вид

$\left(2a^2-7a\right)x-5\left(6x+3\right)=2a^2-9a-50$;

$\left(2a^2-7a\right)x-30x-15=2a^2-9a-50$;

$\left(2a^2-7a-30\right)x=2a^2-9a-35$.

а) $2a^2-7a-30=0$; $a_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{49+240}}{4}=\dfrac{7\pm17}{4}$; $\left[\begin{array}{l} a=6 \\ a=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$;

$2a^2-7a-30=\left(2a+5\right)\left(a-6\right)$.

б) $2a^2 - 9a - 35 = 0$; $a_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81+280}}{4} = \frac{9 \pm 19}{4}$; $\left[\begin{array}{l} a = 7 \\ a = -\frac{5}{2} \end{array}\right.$;

$$2a^2 - 9a - 35 = (2a + 5)(a - 7).$$

Итак, уравнение имеет вид

$$(2a + 5)(a - 6)x = (2a + 5)(a - 7).$$

Только при $a = -2{,}5$ уравнение имеет бесконечное множество решений (не менее четырёх), а значит и система имеет не менее четырёх решений.

Ответ: при $a = -2{,}5$ система уравнений

$$\begin{cases} (2a^2 - 7a)x - 25y = 2a^2 - 9a - 50 \\ 6x - 5y + 3 = 0 \end{cases}$$

имеет не менее четырёх решений.

4. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} x + 5y = -5 \\ x^2 + 16xy + 64y^2 - 12ax - 96ay + 45a^2 + 66a + 121 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

По смыслу второе уравнение должно иметь только один корень. Преобразуем его:

$$(x + 8y)^2 - 12a(x + 8y) + 45a^2 + 66a + 121 = 0 .$$

Значит относительно $t = x + 8y$ мы имеем квадратное уравнение.

$$D = 36a^2 - 45a^2 - 66a - 121 =$$
$$= -(9a^2 + 66a + 121) = -(3a + 11)^2 \geqslant 0,$$

значит $(3a + 11)^2 \leqslant 0$, т.е. $a = -3\frac{2}{3}$ $(D = 0)$.

Тогда $t_1 = t_2 = 6a$, значит $\begin{cases} x + 5y = -5 \\ x + 8y = -22 \end{cases}$.

Ответ: при $a = -3\frac{2}{3}$ система уравнений

$$\begin{cases} x + 5y = -5 \\ x^2 + 16xy + 64y^2 - 12ax - 96ay + 45a^2 + 66a + 121 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

5. Найдите все значения параметра a, при которых система

уравнений $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 2a \\ \frac{5}{x} + \frac{12}{y} = 1 - 3a \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

$D(\text{C})$: $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$ ($D(\text{C})$ – область определения системы).

Приравняв коэффициенты при слагаемых, найдём x и y.

а) $\begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{10}{y} = 10a \\ \frac{5}{x} + \frac{12}{y} = 1 - 3a \end{cases}$ $\boxed{2} - \boxed{1}$; $\frac{2}{y} = 1 - 13a$;

$\frac{2}{y} = 1 - 13a$; $y = \frac{2}{1-13a}$; $a \neq \frac{1}{13}$.

б) $\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{12}{y} = 12a \\ \frac{5}{x} + \frac{12}{y} = 1 - 3a \end{cases}$ $\boxed{1} - \boxed{2}$; $\frac{1}{x} = 15a - 1$;

$x = \frac{1}{15a-1}$; $a \neq \frac{1}{15}$.

Отметим, что $x \cdot y \neq 0$, т.е. $\left(\frac{1}{15a-1}; \frac{2}{1-13a}\right) \in D(\text{C})$.

Ответ: при $\begin{cases} a \neq \frac{1}{13} \\ a \neq \frac{1}{15} \end{cases}$ система уравнений $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 2a \\ \frac{5}{x} + \frac{12}{y} = 1 - 3a \end{cases}$

имеет хотя бы одно решение.

6. Даны две системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+3y} = -\dfrac{1}{4} \\ x-3y = a^2 - a \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x-3y = a \\ x-2y = -1+a \end{cases}.$$ Найдите все

значения параметра a, при которых каждая система имеет единственное решение и эти решения совпадают.

$D(\text{C})$: $\quad x+3y \neq 0$.

Преобразуем первую систему.

1) $\begin{cases} x+3y = -4 & \boxed{1}-\boxed{2} \\ x-3y = a^2-a & \boxed{1}+\boxed{2} \end{cases};$

$$\begin{cases} 6y = -4+a-a^2 \\ 2x = a^2-a-4 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = \dfrac{-4+a-a^2}{6} \\ x = \dfrac{a^2-a-4}{2} \end{cases}.$$

2) $\begin{cases} x-3y = a & \boxed{2}-\boxed{1} \\ x-2y = -1+a & \boxed{1}+\boxed{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} y = -1 \\ x = \dfrac{5y+2a-1}{2} \end{cases}.$

Значит $-1 = \dfrac{-4+a-a^2}{6}$; $\quad a^2-a-2=0$; $\quad \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=-1 \end{array}\right.$.

а) $a=2$:

для $\boxed{1}$ системы $\begin{cases} y=-1 \\ x=-1 \end{cases};$

для $\boxed{2}$ системы $\begin{cases} y=-1 \\ x=-1 \end{cases}$ – значит есть общие решения ($x+3y \neq 0$).

б) $a=-1$:

для $\boxed{1}$ системы $\begin{cases} y=-1 \\ x=-1 \end{cases};$

для $\boxed{2}$ системы $\begin{cases} y=-1 \\ x=-4 \end{cases}$ – общего решения нет.

Ответ: при $a = 2$ системы уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{x+3y} = -\dfrac{1}{4} \\ x - 3y = a^2 - a \end{cases}$

и $\begin{cases} x - 3y = a \\ x - 2y = -1 + a \end{cases}$ имеют единственное решение,

и эти решения совпадают.

7. При каких значениях параметра a система уравнений

$\begin{cases} y = a - 1 - x \\ x\left(a - 1 - x\right) = 3a - 8 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Заданная система имеет единственное решение, если уравнение $x^2 - \left(a - 1\right)x + 3a - 8 = 0$ имеет единственное решение, что возможно только при $D = 0$.

$D = \left(a-1\right)^2 - 4\left(3a-8\right) = a^2 - 2a + 1 - 12a + 32 = a^2 - 14a + 33 = 0;$

$\left[\begin{array}{l} a = 11 \\ a = 3 \end{array}\right.$, тогда $x_1 = x_2 = \dfrac{a-1}{2}$.

а) $a = 11$, тогда $x = 5$ и $y = 5$;

б) $a = 3$, тогда $x = 1$ и $y = 1$.

Ответ: при $a \in \left\{3; 11\right\}$ система уравнений

$\begin{cases} y = a - 1 - x \\ x\left(a - 1 - x\right) = 3a - 8 \end{cases}$ имеет единственное решение.

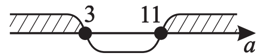
8. Полагая, что система $\begin{cases} x + y = a - 1 \\ xy = 3a - 8 \end{cases}$ имеет решение,

найти наименьшее значение z ($z = x^2 + y^2$).

Решая систему и используя теорему, обратную теореме Виета, приходим к уравнению $t^2 - \left(a - 1\right)t + 3a - 8 = 0$, корнями которого являются $t_1 = x$; $t_2 = y$ или наоборот. Это уравнение разрешимо при $D \geqslant 0$.

$D = (a-1)^2 - 4(3a-8) = a^2 - 2a + 1 - 12a + 32 =$

$= a^2 - 14a + 33 = (a-3)(a-11)$;



Так как $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$,

то $x^2 + y^2 = (a-1)^2 - 2(3a-8)$,

но $(a-1)^2 - 2(3a-8) = a^2 - 2a + 1 - 6a + 16 = a^2 - 8a + 17$.

Значит $z = a^2 - 8a + 17 = (a-4)^2 + 1$;

тогда $z_{наим} = z(4) = 1$, где $a \in (-\infty; 3] \cup [11; \infty)$.

Исследуем это условие.

$a \geqslant 4$; $y = z(a) \uparrow$; $z(11) = z_{наим} = (11-4)^2 + 1 = 7^2 + 1 = 50$;

$a < 4$; $y = z(a) \downarrow$; $z(3) = z_{наим} = (3-4)^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$.

Итак, $z_{наим} = 2$ при $a = 3$, и система имеет решение.

В данном случае $x = y = 1$.

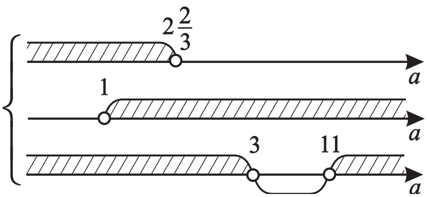
Ответ: полагая, что система $\begin{cases} x + y = a - 1 \\ xy = 3a - 8 \end{cases}$ имеет решение, получим наименьшее значение $z_{наим} = 2$ $(z = x^2 + y^2)$.

9. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} x + y = a - 1 \\ xy = 3a - 8 \end{cases}$ имеет два решения, причём абсциссы этих решений имеют разные знаки и абсолютная величина положительной абсциссы больше абсолютной величины отрицательной абсциссы решения?

Пусть $(x_1; y_1)$; $(x_2; y_2)$ – решения системы $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_1| > |x_2| \end{cases}$.

Уравнение $x^2-(a-1)x+3a-8=0$ определяет абсциссы корней решения. В этом случае для $ax^2+bx+c=0$, чтобы выполнялись условия задачи, необходимо

$$\begin{cases} \dfrac{c}{a}<0 \\ -\dfrac{b}{a}>0\,; \\ D>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3a-8<0 \\ a-1>0 \\ D=a^2-14a+33>0 \end{cases}.$$



$$\left(1;\,2\,\frac{2}{3}\right)$$

Ответ: при $a\in\left(1;\,2\,\dfrac{2}{3}\right)$ система $\begin{cases} x+y=a-1 \\ xy=3a-8 \end{cases}$ имеет два решения, причём абсциссы этих решений имеют разные знаки и абсолютная величина положительной абсциссы больше абсолютной величины отрицательной абсциссы решения.

Тренировочная работа 2

1. Для каждого значения параметра a решите систему уравнений: $\begin{cases} x + 8y = 3 \\ 2x + y = a \\ 5x + 16y = a^2 + 6a \end{cases}$.

2. При каких значениях параметра a площадь фигуры, заданной системой неравенств $\begin{cases} y^2 + x^2 - 2ax \leqslant 4 - a^2 \\ (x+1)^2 \leqslant 25 \end{cases}$, равна 2π?

3. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} \left(5a^2 - 27a\right) x + 16y = 5a^2 - 32a + 6 \\ 5x - 8y - 3 = 0 \end{cases}$ имеет не менее восьми решений.

4. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ x^2 + 4xy + 4y^2 - 18ax - 36ay + 85a^2 + 20a + 25 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

5. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 4a \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{5}{y} = 1 - a \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

6. Даны две системы уравнений $\begin{cases} (x - 6y)^{-1} = -\dfrac{1}{10} \\ 7x - 2y = 2a \end{cases}$ и $\begin{cases} 4x + y = 2a \\ \dfrac{1}{x-4y} = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$. Найдите все значения параметра a, при которых каждая система имеет единственное решение и эти решения совпадают.

7. При каких значениях параметра m сумма квадратов координат решения системы $\begin{cases} x + y = m + 2 \\ xy = 3m + 1 \end{cases}$ будет наименьшей?

8. Найдите все значения параметра k, при которых система уравнений $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x^2 + 4xy + 4y^2 - 2kx - 4ky - 3k^2 = 0 \end{cases}$ имеет не единственное решение.

Решение тренировочной работы 2

1. Для каждого значения параметра a решите систему

уравнений: $\begin{cases} x + 8y = 3 \\ 2x + y = a \\ 5x + 16y = a^2 + 6a \end{cases}$.

$$\begin{cases} x + 8y = 3 \\ 2x + y = a \\ 5x + 16y = a^2 + 6a \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 3 - 8y \\ -15y = a - 6 \\ -24y = a^2 + 6a - 15 \end{cases}; \begin{cases} x = 3 - 8y \\ y = -\dfrac{a-6}{15} \\ y = -\dfrac{a^2+6a-15}{24} \end{cases},$$

тогда $\dfrac{a-6}{15} = \dfrac{a^2+6a-15}{24}$; $\quad 8\left(a - 6\right) = 5\left(a^2 + 6a - 15\right)$;

$5a^2 + 22a - 27 = 0$; $\left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -5{,}4 \end{array}\right.$.

а) Пусть $a = 1$, тогда $y = -\dfrac{1-6}{15}$, т.е. $y = \dfrac{1}{3}$

и $x = 3 - 8 \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$.

б) Пусть $a = -5{,}4$, тогда $y = -\dfrac{-5{,}4-6}{15}$, т.е. $y = \dfrac{19}{25}$,

а $x = 3 - 8 \cdot \dfrac{19}{25} = -3\dfrac{2}{25}$.

Ответ: система уравнений $\begin{cases} x + 8y = 3 \\ 2x + y = a \\ 5x + 16y = a^2 + 6a \end{cases}$ имеет:

1) при $a = 1$ единственное решение $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$;

2) при $a = -5{,}4$ единственное решение $\left(-3\dfrac{2}{25}; \dfrac{19}{25}\right)$;

3) при $\begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq -5{,}4 \end{cases}$ $\left(x_0; y_0\right) \in \varnothing$.

2. При каких значениях параметра a площадь $S_Ф$ фигуры, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} y^2 + x^2 - 2ax \leqslant 4 - a^2 \\ (x+1)^2 \leqslant 25 \end{cases}, \text{ равна } 2\pi\,?$$

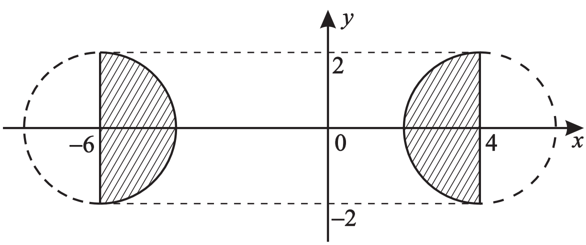
После преобразований $\begin{cases} y^2 + (x-a)^2 \leqslant 4 \\ x+1 \leqslant 5 \\ x+1 \geqslant -5 \end{cases}$;

$$\begin{cases} y^2 + (x-a)^2 \leqslant 2^2 \\ x \leqslant 4 \\ x \geqslant -6 \end{cases}.$$

В первом неравенстве задан круг с радиусом $R = 2$, площадь которого $S_{кр} = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$ независимо от значения параметра a.

Тогда, так как $-6 \leqslant x \leqslant 4$ и $S_Ф = 2\pi$ (кв. ед.), это возможно, только если центр круга имеет координаты $(4;\,0)$ или $(-6;\,0)$.

Значит $\left[\begin{array}{l} a = 4 \\ a = -6 \end{array}\right.$.



Ответ: площадь фигуры, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} y^2 + x^2 - 2ax \leqslant 4 - a^2 \\ (x+1)^2 \leqslant 25 \end{cases}, \text{ равна } 2\pi \text{ при } \left[\begin{array}{l} a = 4 \\ a = -6 \end{array}\right..$$

3. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases}\left(5a^2-27a\right)x+16y=5a^2-32a+6\\5x-8y-3=0\end{cases}$ имеет не менее восьми решений.

Преобразуя систему, имеем

$$\begin{cases}\left(5a^2-27a\right)x+16y=5a^2-32a+6\\8y=5x-3\end{cases}.$$

Подставляя вместо y значения x из второго уравнения, получим из первого уравнения уравнение только относительно x:

$$\left(5a^2-27a\right)x+2\left(5x-3\right)=5a^2-32a+6;$$

$$\left(5a^2-27a+10\right)x=5a^2-32a+12.$$

а) $5a^2-27a+10=0$;

$$a_{1,2}=\frac{27\pm\sqrt{729-200}}{10}=\frac{27\pm23}{10};\quad \left[\begin{array}{l}a=5\\a=\dfrac{2}{5}\end{array}\right.;$$

$$5a^2-27a+10=\left(5a-2\right)\left(a-5\right).$$

б) $5a^2-32a+12=0$;

$$a_{1,2}=\frac{16\pm\sqrt{256-60}}{5}=\frac{16\pm14}{5};\quad \left[\begin{array}{l}a=6\\a=\dfrac{2}{5}\end{array}\right.;$$

$$5a^2-32a+12=\left(a-6\right)\left(5a-2\right).$$

Итак, уравнение имеет вид

$$\left(5a-2\right)\left(a-5\right)x=\left(5a-2\right)\left(a-6\right).$$

Очевидно, что только при $a=0{,}4$ уравнение имеет бесконечное множество решений (не менее восьми).

Ответ: при $a=0{,}4$ система уравнений

$$\begin{cases}\left(5a^2-27a\right)x+16y=5a^2-32a+6\\5x-8y-3=0\end{cases}$$

имеет не менее восьми решений.

4. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x-2y=5 \\ x^2+4xy+4y^2-18ax-36ay+85a^2+20a+25=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

По смыслу второе уравнение имеет только один корень. Преобразуем его:

$(x+2y)^2-18a(x+2y)+85a^2+20a+25=0$.

Тогда, чтобы уравнение имело единственный корень, $D=0$:

$$D=(9a)^2-85a^2-20a-25=$$

$$=-\left(4a^2+20a+25\right)=-(2a+5)^2=0,$$

т.е. $a=-2{,}5$.

Тогда $x+2y=9a$, значит $\begin{cases} x-2y=5 \\ x+2y=-22{,}5 \end{cases}$.

Ответ: при $a=-2{,}5$ система уравнений

$$\begin{cases} x-2y=5 \\ x^2+4xy+4y^2-18ax-36ay+85a^2+20a+25=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

5. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4a \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{y}=1-a \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

$D(\text{C})$: $\begin{cases} x\neq 0 \\ y\neq 0 \end{cases}$.

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4a \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{y}=1-a \end{cases} \Bigg| \cdot 4$; $\begin{cases} \dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{y}=16a \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{y}=1-a \end{cases}$ $\boxed{2}-\boxed{1}$;

$\dfrac{1}{y}=1-17a$; $y=\dfrac{1}{1-17a}$ $\left(a\neq\dfrac{1}{17}\right)$.

б) $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4a \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{y}=1-a \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} \cdot 5 \\ \\ \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{5}{x}+\dfrac{5}{y}=20a \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{y}=1-a \end{array}\right. \quad \boxed{1}-\boxed{2};$

$\dfrac{1}{x}=21a-1; \quad x=\dfrac{1}{21a-1} \quad \left(a\neq\dfrac{1}{21}\right).$

Отметим, что $x\cdot y\neq 0$, т.е. $\left(\dfrac{1}{21a-1}; \dfrac{1}{1-17a}\right)\in D(\mathrm{C})$.

Ответ: при $\left\{\begin{array}{l} a\neq\dfrac{1}{17} \\ a\neq\dfrac{1}{21} \end{array}\right.$ система уравнений $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4a \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{y}=1-a \end{array}\right.$

имеет хотя бы одно решение.

6. Даны две системы уравнений

$\left\{\begin{array}{l} (x-6y)^{-1}=-\dfrac{1}{10} \\ 7x-2y=2a \end{array}\right.$ и $\left\{\begin{array}{l} 4x+y=2a \\ \dfrac{1}{x-4y}=-\dfrac{1}{6} \end{array}\right.$.

Найдите все значения параметра a, при которых

каждая система имеет единственное решение и эти решения совпадают.

$D(\mathrm{C})$: $\left\{\begin{array}{l} x\neq 6y \\ y\neq 4y \end{array}\right.$.

Преобразуем системы для удобства решения:

$\left\{\begin{array}{l} x-6y=-10 \\ 7x-2y=2a \end{array}\right.$ и $\left\{\begin{array}{l} x-4y=-6 \\ 4x+y=2a \end{array}\right.$;

$\left\{\begin{array}{l} x=6y-10 \\ 7(6y-10)-2y=2a \end{array}\right.$ и $\left\{\begin{array}{l} x=4y-6 \\ 4(4y-6)+y=2a \end{array}\right.$;

$\left\{\begin{array}{l} x=6y-10 \\ 40y=2a+70 \end{array}\right.$ и $\left\{\begin{array}{l} x=4y-6 \\ 17y=2a+24 \end{array}\right.$;

$y=\dfrac{a+35}{20}$ и $y=\dfrac{2a+24}{17}$.

Тогда $\frac{a+35}{20}=\frac{2a+24}{17}$.

$17a+35\cdot 17=40a+480$; $23a=115$; $a=5$.

Для $\boxed{1}$ системы $\begin{cases} y=2 \\ x=2 \end{cases}$.

Для $\boxed{2}$ системы $\begin{cases} y=2 \\ x=2 \end{cases}$. Решения совпадают.

Отметим, что $(2;\,2)\in D(\mathrm{C})$.

Ответ: при $a=5$ системы

$$\begin{cases} (x-6y)^{-1}=-\frac{1}{10} \\ 7x-2y=2a \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 4x+y=2a \\ \frac{1}{x-4y}=-\frac{1}{6} \end{cases} \text{ имеют}$$

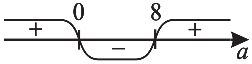
единственные решения и эти решения совпадают.

7. При каких значениях параметра m сумма квадратов координат решения системы $\begin{cases} x+y=m+2 \\ xy=3m+1 \end{cases}$ будет наименьшей?

По теореме, обратной теореме Виета, данная система уравнений порождает уравнение $t^2-(m+2)\,t+3m+1=0$, корнями которого являются $t_1=x$; $t_2=y$ или наоборот. Это уравнение разрешимо при $D\geqslant 0$.

$D=(m+2)^2-4\,(3m+1)=m^2+4m+4-12m-4=$

$=m\,(m-8)$.



Так как $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, то

$x^2+y^2=(m+2)^2-2\,(3m+1)=$

$=m^2+4m+4-6m-2=m^2-2m+2$,

тогда $x^2+y^2=(m-1)^2+1$, значит при $m=1$

наименьшее значение $x^2+y^2=1$.

Учтем, что для разрешимости порожденного квадратного уравнения $m \in (-\infty; 0] \cup [8; \infty)$.

Исследуем эти условия.

Положим $z = x^2 + y^2$.

а) при $m \geqslant 1$ $\quad z = x^2 + y^2 = m^2 - 2m + 2 = z(m)$;

$y = z(m) \uparrow$; тогда $z_{\text{наим}} = z(8) = (8-1)^2 + 1 = 50$.

б) при $m < 1$ $\quad y = z(m) \downarrow$; тогда

$z_{\text{наим}} = z(0) = (0-1)^2 + 1 = 2$.

Итак, $z_{\text{наим}} = z(0) = 2$.

В данном случае $x = -1$; $y = -1$.

Ответ: при $m = 0$ сумма квадратов координат решения системы $\begin{cases} x + y = m + 2 \\ xy = 3m + 1 \end{cases}$ будет наименьшей и равна 2.

8. Найдите все значения параметра k, при которых

система уравнений $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x^2 + 4xy + 4y^2 - 2kx - 4ky - 3k^2 = 0 \end{cases}$

имеет не единственное решение.

Прежде всего, необходимо разобраться с требованием неединственности решения. Что означает это условие? Оно означает, что либо система имеет более одного решения, либо система решения не имеет, т.е. единственности решения нет.

Преобразуем второе уравнение системы.

$(x + 2y)^2 - 2(x + 2y)k - 3k^2 = 0$.

Решим это уравнение, как квадратное уравнение относительно $x + 2y$.

Тогда $(x + 2y)_{1,2} = k \pm \sqrt{k^2 + 3k^2} = k \pm 2k$.

Итак, $\left[\begin{array}{l} x+2y=3k \\ x+2y=-k \end{array}\right.$, т.е. система приобретает вид

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ \left[\begin{array}{l} x+2y=3k \\ x+2y=-k \end{array}\right. \end{cases}, \text{ значит } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2y=3 \\ x+2y=3k \end{cases} \\ \begin{cases} x+2y=3 \\ x+2y=-k \end{cases} \end{array}\right., \text{ тогда}$$

а) из первой системы следует, что $3=3k$, т.е. $k=1$,

но при $k=1$ система уравнений $\begin{cases} x+2y=3 \\ x+2y=3 \end{cases}$ равносильна уравнению $x+2y=3$, т.е. система имеет бесконечное множество решений;

б) при $k \neq 1$ система решений не имеет;

в) из второй системы $\begin{cases} x+2y=3 \\ x+2y=-k \end{cases}$ следует, что $3=-k$,

т.е. $k=-3$, тогда система имеет вид $\begin{cases} x+2y=3 \\ x+2y=3 \end{cases}$

и имеет бесконечное множество решений.

При $k=-3$ первая система $\begin{cases} x+2y=3 \\ x+2y=-9 \end{cases}$ решения не имеет.

г) при $k \neq -3$ вторая система решения не имеет.

Итак, подведем итоги.

При $\left[\begin{array}{l} k=1 \\ k=-3 \end{array}\right.$ исходная система имеет бесконечное множество решений, т.е. не единственное.

При $\begin{cases} k \neq 1 \\ k \neq 3 \end{cases}$ исходная система решений не имеет, т.е. единственного решения нет.

Ответ: система $\begin{cases} x+2y=3 \\ x^2+4xy+4y^2-2kx-4ky-3k^2=0 \end{cases}$

при любых значениях k единственного решения не имеет.

3
Неравенства[1]

Практикум 3

1. Найдите все значения параметра a, при которых решением неравенства $\frac{x^2+x-12}{x^2-(a-4)x-4a}<0$ является объединение двух непересекающихся интервалов.

Рассмотрим D для знаменателя.

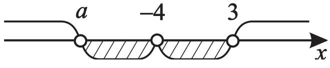
$$D=(a-4)^2+16a=(a+4)^2, \quad x_{1,2}=\frac{a-4\pm(a+4)}{2}; \quad \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=-4 \end{array}\right.,$$

т.е. $x^2-(a-4)x-4a=(x-a)(x+4)$.

Тогда исходное неравенство приобретает вид

$\frac{(x+4)(x-3)}{(x+4)(x-a)}<0$, т.е. при $x\neq -4$ $\frac{x-3}{x-a}<0$.

Графически условия задачи выглядят так.



Таким образом, выполнение условия возможно, если $a<-4$.

Ответ: при $a<-4$ решением неравенства $\frac{x^2+x-12}{x^2-(a-4)x-4a}<0$ является объединение двух непересекающихся интервалов $(a;-4)\cup(-4;3)$.

---

[1]Подробнее см. Шахмейстер А. Х. Уравнения и неравенства с параметрами. СПб.: «ЧеРо-на-Неве», 2006. Гл. 4, 5, 6, 7.

2. Найдите все значения параметра a, при которых решением неравенства $\dfrac{x^2-(a+6)x+6a}{x^2-(a-3)x-3a}<0$ является объединение двух непересекающихся интервалов.

Разложим на множители числитель и знаменатель неравенства.

а) $x^2-(a+6)\,x+6a=0$;

$$x_{1,2}=\frac{a+6\pm\sqrt{(a+6)^2-24a}}{2}=\frac{a+6\pm(a-6)}{2};$$

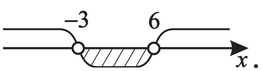
$$x^2-(a+6)+6a=(x-a)(x-6); \qquad \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=6 \end{array}\right..$$

б) $x^2-(a-3)\,x-3a=0$;

$$x_{1,2}=\frac{(a-3)\pm\sqrt{(a-3)^2+12a}}{2}=\frac{(a-3)\pm(a+3)}{2}; \qquad \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=-3 \end{array}\right..$$

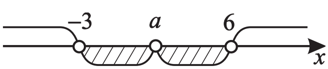
Итак, неравенство примет вид $\dfrac{(x-a)(x-6)}{(x-a)(x+3)}<0$;

при $x\neq a$ $\quad \dfrac{x-6}{x+3}<0$.



Чтобы решение неравенства разбилось на объединение двух непересекающихся интервалов, необходимо, чтобы $-3<a<6$.

Тогда графически это будет выглядеть так.



Ответ: при $-3<a<6$ решением неравенства $\dfrac{x^2-(a+6)x+6a}{x^2-(a-3)x-3a}<0$ является объединение двух непересекающихся интервалов $(-3;\,a)\cup(a;\,6)$.

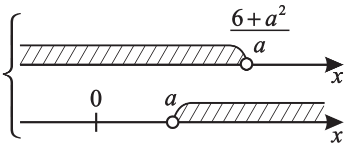
3. При любом значении параметра a решите неравенство $\dfrac{6}{x-a} > a$.

$$\frac{6-ax+a^2}{x-a} > 0 .$$

1) $x > a$; $\quad 6 > ax - a^2$; $\quad ax < 6 + a^2$;

а) $a > 0$;

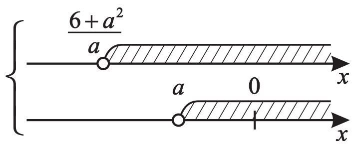
$$\begin{cases} x < \dfrac{6+a^2}{a}; \\ x > a \end{cases} \quad \left(\frac{6+a^2}{a} = \frac{6}{a} + a\right);$$



$\left(a; \dfrac{6+a^2}{a}\right)$;

б) $a < 0$;

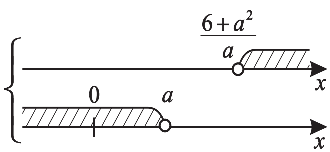
$$\begin{cases} x > \dfrac{6+a^2}{a}; \\ x > a \end{cases} \quad x > a .$$



2) $x < a$; $\quad 6 < ax - a^2$; $\quad ax > 6 + a^2$;

а) $a > 0$;

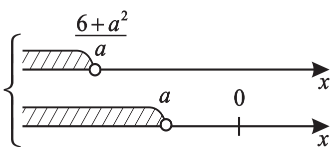
$$\begin{cases} x > \dfrac{6+a^2}{a}; \\ x < a \end{cases}$$



$\varnothing$

б) $a < 0$;

$$\begin{cases} x < \dfrac{6+a^2}{a}; \\ x < a \end{cases}$$



$x < \dfrac{6+a^2}{a}$.

3) $a = 0$; $\quad \dfrac{6}{x} > 0$, т.е. $x > 0$.

Ответ: решением неравенства $\frac{6}{x-a} > a$ является

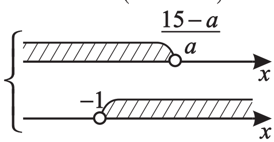
1) при $a > 0$ $x \in \left(a; \frac{6+a^2}{a}\right)$;

2) при $a < 0$ $x \in \left(-\infty; \frac{6+a^2}{a}\right) \cup (a; \infty)$;

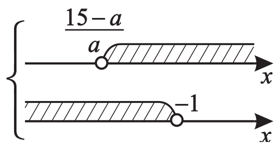
3) при $a = 0$ $x \in (0;\infty)$.

4. При любом значении параметра a решите неравенство $\frac{3}{ax+a} > \frac{1}{5}$.

1) Пусть $a(x+1) > 0$; тогда $15 > (ax+a)$; $ax < 15-a$;

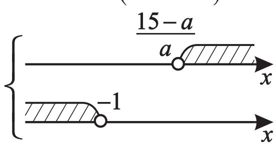
а) $a > 0$; $\begin{cases} x < \frac{15-a}{a} \\ x > -1 \end{cases}$; 

$\left(-1; \frac{15-a}{a}\right)$;

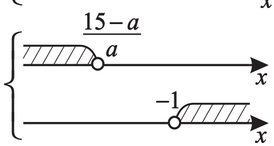
б) $a < 0$; $\begin{cases} x > \frac{15-a}{a} \\ x < -1 \end{cases}$; 

$\left(\frac{15-a}{a}; -1\right)$.

2) Пусть $a(x+1) < 0$, тогда $15 < (ax+a)$; $ax > 15-a$;

а) $a > 0$; $\begin{cases} x > \frac{15-a}{a} \\ x < -1 \end{cases}$; 

$\varnothing$

б) $a < 0$; $\begin{cases} x < \frac{15-a}{a} \\ x > -1 \end{cases}$; 

$\varnothing$

3) При $a = 0$ неравенство не определено.

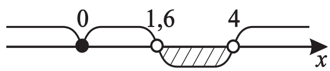
Ответ: решением неравенства $\frac{3}{ax+a} > \frac{1}{5}$ является

1) при $a > 0$ $x \in \left(-1; \frac{15-a}{a}\right)$;

2) при $a < 0$ $x \in \left(\frac{15-a}{a}; -1\right)$.

5. Найдите все значения параметра a, при которых решением неравенства $\dfrac{(x-a-4)(x-4a-16)}{(x+a)(5x+2a)} \leqslant 0$ является объединение интервала и точки, не принадлежащей интервалу и не являющейся его концом.

Очевидно, что корни числителя $x = a + 4$ и $x = 4(a+4)$. Если они совпадут, что возможно при $a = -4$, то неравенство будет иметь вид $\dfrac{x^2}{(x-4)(5x-8)} \leqslant 0$,

т.е. 

$x \in (1,6; 4) \cup \{0\}$.

Других возможностей, чтобы решением неравенства была точка вне интервала, не являющаяся его концом, нет.

Ответ: при $a = -4$ решением неравенства $\dfrac{(x-a-4)(x-4a-16)}{(x+a)(5x+2a)} \leqslant 0$ является объединение интервала и точки, не принадлежащей интервалу и не являющейся его концом, $(1,6; 4) \cup \{0\}$.

6. При каких значениях параметра a решением неравенства $\dfrac{x^2+1}{a^2x-2a} - \dfrac{1}{2-ax} > \dfrac{x}{a}$ является луч?

$$\frac{x^2+1}{a^2x-2a} - \frac{1}{2-ax} - \frac{x}{a} > 0;$$

$$\frac{x^2+1+a-x(ax-2)}{a(ax-2)} > 0;$$

$$\frac{(1-a)x^2+2x+a+1}{a(ax-2)} > 0.$$

а) Если $a = 1$, то $\dfrac{2x+2}{x-2} > 0$ не подходит.

б) Если $a \neq 1$,

$$D = 1 - \left(a+1\right)\left(1-a\right) = 1 - 1 + a^2 = a^2.$$

Решим уравнение $(1-a)\,x^2 + 2x + a + 1 = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{-1+a}{1-a} \\ x = \frac{-1-a}{1-a} \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \frac{a+1}{a-1} \end{array}\right. .$$

Итак, $\dfrac{(1-a)(x+1)\left(x-\frac{a+1}{a-1}\right)}{a^2\left(x-\frac{2}{a}\right)} > 0$.

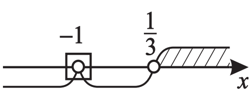
в) Пусть $a \neq 0$. Тогда для того чтобы решением неравенства являлся луч, необходимо, чтобы любые два корня числителя или знаменателя совпали и исключённая точка не попадала в решение.

Значит

$$\left[\begin{array}{l} -1 = \frac{a+1}{a-1} \\ -1 = \frac{2}{a} \\ \frac{a+1}{a-1} = \frac{2}{a} \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} -a+1 = a+1 \\ a = -2 \\ a^2 - a + 2 = 0 \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = -2, \\ a \in \varnothing \end{array}\right. \text{ но } a \neq 0.$$

Итак, при $a = -2$ $\quad \dfrac{(x+1)\left(x-\frac{-2+1}{-2-1}\right)}{x-\frac{2}{-2}} > 0$;

Следовательно, $\dfrac{(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{(x+1)} > 0$;



$x > \dfrac{1}{3}$.

Ответ: при $a = -2$ решением неравенства

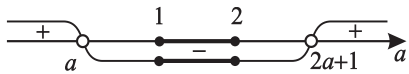
$$\frac{x^2+1}{a^2x-2a} - \frac{1}{2-ax} > \frac{x}{a} \text{ является луч } \left(\frac{1}{3};\infty\right).$$

7. При каких значениях параметра a неравенство $\frac{x-2a-1}{x-a} < 0$ справедливо для любых $x \in [1;\, 2]$?

Корни числителя и знаменателя $\left[\begin{array}{l} x = 2a+1 \\ x = a \end{array}\right.$.

Пусть

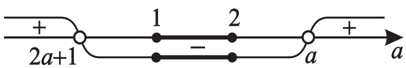
а) $2a+1 > a$; $a > -1$,



тогда $\begin{cases} 2 < 2a+1 \\ 1 > a \end{cases}$; $\begin{cases} a > \frac{1}{2}; \\ a < 1 \end{cases}$ $a \in \left(\frac{1}{2};\, 1\right) \subset (-1;\, \infty)$;

б) $2a+1 < a$;

тогда графически это выглядит так.



Значит $\begin{cases} 2 < a \\ 1 > 2a+1 \end{cases}$; $\begin{cases} a > 2 \\ a < 0 \end{cases}$ $\varnothing$.

Ответ: при $a \in \left(\frac{1}{2};\, 1\right)$ решением неравенства является отрезок $[1;\, 2]$.

Тренировочная работа 3

1. Найдите все значения параметра a, при которых решением неравенства $\frac{x^2-5x-6}{x^2-(a-1)x-a}<0$ является объединение двух непересекающихся интервалов.

2. Найдите все значения параметра a, при которых решением неравенства $\frac{x^2-(a-1)x-a}{x^2-(a-5)x-5a}<0$ является объединение двух непересекающихся интервалов.

3. При любом значении параметра a решите неравенство $\frac{5}{x-4a}>4a$.

4. При любом значении параметра a решите неравенство $\frac{1}{ax-a}>\frac{3}{4}$.

5. Найдите все значения параметра a, при которых решением неравенства $\frac{(x-a-1)(x-2a-2)}{(x+2a)(3x+2a)}\leqslant 0$ является объединение интервала и точки, не принадлежащей интервалу и не являющейся его концом.

6. При каких значениях параметра a частью решения неравенства $\frac{2ax+3}{5x-4a}<4$ является луч $[-7;\infty)$?

Решение тренировочной работы 3

1. Найдите все значения параметра a, при которых решением неравенства $\dfrac{x^2-5x-6}{x^2-(a-1)x-a}<0$ является объединение двух непересекающихся интервалов.

Рассмотрим дискриминант знаменателя.

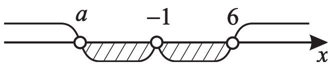
$D=(a-1)^2+4a=(a+1)^2$, тогда $x_{1,2}=\dfrac{a-1\pm(a+1)}{2}$; $\left[\begin{array}{l} x=a \\ x=-1 \end{array}\right.$,

т.е. $x^2-(a-1)\,x-a=(x-a)\,(x+1)$.

Тогда неравенство примет вид $\dfrac{(x+1)(x-6)}{(x-a)(x+1)}<0$,

т.е. при $x\neq-1$ $\quad\dfrac{x-6}{x-a}<0$.

Графическая интерпретация задачи выглядит так.



Такое решение возможно только при $a<-1$.

Ответ: при $a<-1$ решением неравенства

$\dfrac{x^2-5x-6}{x^2-(a-1)x-a}<0$ является объединение двух

непересекающихся интервалов $(a;\,-1)\cup(-1;\,6)$.

2. Найдите все значения параметра a, при которых решением неравенства $\dfrac{x^2-(a-1)x-a}{x^2-(a-5)x-5a}<0$ является объединение двух непересекающихся интервалов.

Разложим на множители числитель и знаменатель неравенства.

а) $x^2-(a-1)\,x-a=0$;

$x_{1,2}=\dfrac{a-1\pm\sqrt{(a-1)^2+4a}}{2}=\dfrac{(a-1)\pm(a+1)}{2}$; $\left[\begin{array}{l} x=a \\ x=-1 \end{array}\right.$;

$x^2-(a-1)\,x-a=(x-a)\,(x+1)$.

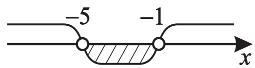
б) $x^2 - (a-5)\,x - 5a = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{a-5 \pm \sqrt{(a-5)^2 + 20a}}{2} = \frac{a-5 \pm (a+5)}{2}; \quad \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = -5 \end{array}\right.;$$

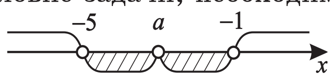
$$x^2 - (a-5)\,x - 5a = (x-a)(x+5).$$

Неравенство примет вид $\dfrac{(x-a)(x+1)}{(x-a)(x+5)} < 0$;

при $x \neq a$ $\dfrac{x+1}{x+5} < 0$.



Чтобы выполнялось условие задачи, необходимо, чтобы $-5 < a < -1$.



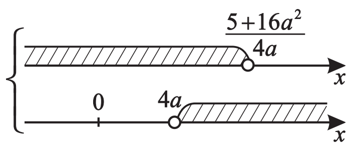
Ответ: при $-5 < a < -1$ решением неравенства $\dfrac{x^2-(a-1)\,x-a}{x^2-(a-5)\,x-5a} < 0$ является объединение двух непересекающихся интервалов $(-5;\, a) \cup (a;\, -1)$.

3. При любом значении параметра a решите неравенство $\dfrac{5}{x-4a} > 4a$.

1) $x > 4a$; тогда $5 > 4ax - 16a^2$,

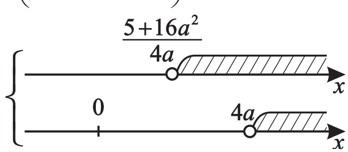
т.е. $4ax < 5 + 16a^2$ $\left(\dfrac{5+16a^2}{4a} = \dfrac{5}{4a} + 4a\right)$;

а) $a > 0$; $\begin{cases} x < \dfrac{5+16a^2}{4a} \\ x > 4a \end{cases}$;



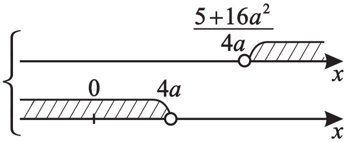
$$4a < x < \frac{5+16a^2}{4a}; \quad x \in \left(4a;\, \frac{5+16a^2}{4a}\right);$$

б) $a < 0$; $\begin{cases} x > \dfrac{5+16a^2}{4a} \\ x > 4a \end{cases}$;



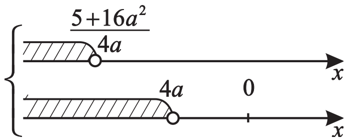
$x > 4a$.

2) $x < 4a$; $4ax > 5 + 16a^2$;

а) $a > 0$; $\begin{cases} x > \dfrac{5+16a^2}{4a} \\ x < 4a \end{cases}$; 

$\varnothing$;

б) $a < 0$;

$\begin{cases} x < \dfrac{5+16a^2}{4a} \\ x < 4a \end{cases}$; 

$x < \dfrac{5+16a^2}{4a}$.

3) При $a = 0$ $\dfrac{5}{x} > 0$, т.е. $x > 0$.

Ответ: решением неравенства $\dfrac{5}{x-4a} > 4a$ является

1) при $a > 0$ $x \in \left(4a; \dfrac{5+16a^2}{4a}\right)$;

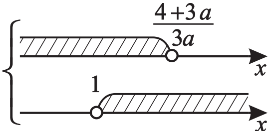
2) при $a < 0$ $x \in \left(-\infty; \dfrac{5+16a^2}{4a}\right) \cup (4a; \infty)$;

3) при $a = 0$ $x \in (0; \infty)$.

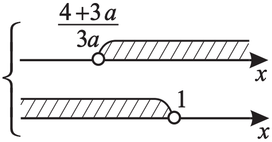
4. При любом значении параметра a решите неравенство $\dfrac{1}{ax-a} > \dfrac{3}{4}$.

1) Пусть $a(x-1) > 0$, тогда $4 > 3a(x-1)$;

$3ax < 4 + 3a$; $\left(\dfrac{4+3a}{3a} = \dfrac{4}{3a} + 1\right)$;

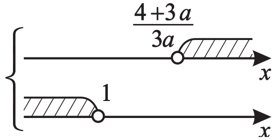
а) $a > 0$; $\begin{cases} x < \dfrac{4+3a}{3a} \\ x > 1 \end{cases}$; 

$\left(1; \dfrac{4+3a}{3a}\right)$;

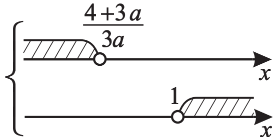
б) $a < 0$; $\begin{cases} x > \dfrac{4+3a}{3a} \\ x < 1 \end{cases}$; 

$\left(\dfrac{4+3a}{3a}; 1\right)$.

2) Пусть $a\left(x-1\right)<0$, тогда $4<3a\left(x-1\right)$; $3ax>4+3a$;

а) $a>0$; $\begin{cases} x>\dfrac{4+3a}{3a} \\ x<1 \end{cases}$; 

$\varnothing$

б) $a<0$; $\begin{cases} x<\dfrac{4+3a}{3a} \\ x>1 \end{cases}$. 

$\varnothing$

3) При $a=0$ неравенство не определено.

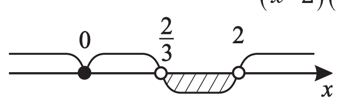
Ответ: решением неравенства $\dfrac{1}{ax-a}>\dfrac{3}{4}$ является

1) при $a>0$ $\left(1;\dfrac{4+3a}{3a}\right)$;

2) при $a<0$ $\left(\dfrac{4+3a}{3a};1\right)$.

5. Найдите все значения параметра a, при которых решением неравенства $\dfrac{(x-a-1)(x-2a-2)}{(x+2a)(3x+2a)}\leqslant 0$ является объединение интервала и точки, не принадлежащей интервалу и не являющейся его концом.

Очевидно, что одним из решений может быть точка, только если корни числителя совпадают, т.е. если $x=a+1$ совпадает с $x=2\left(a+1\right)$, что возможно при $a=-1$. Тогда неравенство примет вид $\dfrac{x^2}{(x-2)(3x-2)}\leqslant 0$,

т.е. $x\in\left(\dfrac{2}{3};2\right)\cup\left\{0\right\}$. 

Ответ: при $a=-1$ решением неравенства $\dfrac{(x-a-1)(x-2a-2)}{(x+2a)(3x+2a)}\leqslant 0$ является объединение интервала и точки, не принадлежащей интервалу и не являющейся его концом.

6. При каких значениях параметра a частью решения неравенства $\frac{2ax+3}{5x-4a}<4$ является луч $\left[-7;\infty\right)$?

$$\frac{2ax+3}{5x-4a}<4;\quad \frac{2ax+3-20x+16a}{5x-4a}<0;\quad \frac{2(a-10)x+16a+3}{5x-4a}<0.$$

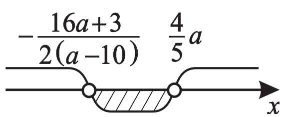
1) Пусть $a-10>0$,

тогда корни числителя и знаменателя $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{16a+3}{2(a-10)} \\ x=\frac{4}{5}a \end{array}\right.$;

а) $\frac{4}{5}a>-\frac{16a+3}{2(a-10)}$; $\quad \frac{8a(a-10)+80a+15}{10(a-10)}>0$;

$\frac{8a^2+15}{10(a-10)}>0$; $\quad a>10$.

Распределение корней на оси тогда будет таким.



$x\in\left(-\frac{16a+3}{2(a-10)};\frac{4}{5}a\right)$ – значит этот случай не подходит.

б) $\frac{4}{5}a<-\frac{16a+3}{2(a-10)}$, тогда $\frac{8a^2+15}{10(a-10)}<0$; $\quad a<10$, что противоречит условию 1), значит, $\quad a\in\varnothing$.

2) Пусть $a=10$, тогда $\frac{0\cdot x+163}{5x-40}<0$; $a<10$.

Этот случай тоже не подойдёт.

3) Пусть $a-10<0$.

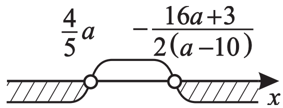
а) $\frac{4}{5}a>-\frac{16a+3}{2(a-10)}$; $\quad \frac{8a^2+15}{10(a-10)}>0$; $\quad a>10$,

но $a<10$, значит $\quad a\in\varnothing$;

б) $\frac{4}{5}a < -\frac{16a+3}{2(a-10)}$; $\quad \frac{8a^2+15}{10(a-10)} < 0$; $\quad a < 10$.

Тогда выполнение $\frac{2(a-10)x+16a+3}{5x-4a} < 0$

возможно при

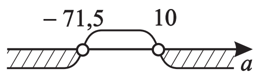


$x \in \left(-\infty; \frac{4}{5}a\right) \cup \left(-\frac{16a+3}{2(a-10)}; \infty\right)$.

По условиям луч $a \in [-7; \infty)$ есть часть решения,

тогда $-\frac{16a+3}{2(a-10)} < -7$; $\quad \frac{-16a-3+14a-140}{2(a-10)} < 0$;

$-\frac{2a+143}{2(a-10)} < 0$,



но $a < 10$, тогда при $a \in (-\infty; -71{,}5)$

$x \in \left(-\frac{16a+3}{2(a-10)}; \infty\right)$, где $[-7; \infty) \subset \left(-\frac{16a+3}{2(a-10)}; \infty\right)$.

Ответ: при $a \in (-\infty; -71{,}5)$ частью решения неравенства $\frac{2ax+3}{5x-4a} < 4$ является луч $[-7; \infty)$.

4

Иррациональные уравнения[1]

Практикум 4

1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{5ax+3}=5x+3$ имеет только одно решение.

Уравнение $\sqrt{5ax+3}=5x+3$ равносильно

$$\begin{cases}5x+3\geqslant 0\\ 5ax+3=(5x+3)^2\end{cases};\quad \begin{cases}x\geqslant -0,6\\ 25x^2+5(6-a)x+6=0\end{cases}.$$

Это уравнение имеет только один корень, если

1) $D=0$;

$$D=25(6-a)^2-4\cdot 25\cdot 6=25\left(36-12a+a^2-24\right)=$$
$$=25\left(a^2-12a+12\right);$$

$$a_{1,2}=6\pm\sqrt{36-12}=6\pm 2\sqrt{6};\quad \left[\begin{array}{l}a=6+2\sqrt{6}\\ a=6-2\sqrt{6}\end{array}\right..$$

При $D=0$ $x_1=x_2=-\frac{5(6-a)}{2\cdot 25}=\frac{a-6}{10}$.

а) Пусть $a=6+2\sqrt{6}$, тогда

$x_1=x_2=\frac{6+2\sqrt{6}-6}{10}=\frac{\sqrt{6}}{5}>-0,6$, т.е. $\frac{\sqrt{6}}{5}$ – подходит.

---

[1]Подробнее см. Шахмейстер А. Х. Иррациональные уравнения и неравенства. СПб.: «Петроглиф», 2008. С. 64.

б) Пусть $a = 6 - 2\sqrt{6}$, тогда $x_1 = x_2 = \frac{6-2\sqrt{6}-6}{10} = -\frac{\sqrt{6}}{5} > -0{,}6$.

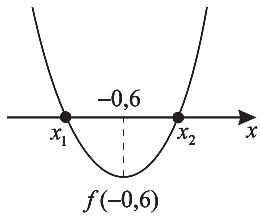
Это просто доказать. Таким образом, $-\frac{\sqrt{6}}{5}$ также подходит.

2) Только один из корней удовлетворяет условию равносильности $x \geqslant -0{,}6$.

Пусть $f(x) = 25x^2 + 5(6-a)x + 6$.

Если $f(-0{,}6) < 0$, то есть единственный корень, такой что $x \geqslant -0{,}6$.

Графически это выглядит так.



$25 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 5 \cdot \frac{3}{5}(6-a) + 6 < 0$;

$9 - 18 + 3a + 6 < 0$; $a < 1$.

Учтём, что $6 - 2\sqrt{6} > 1$, т.е. $6 - 2\sqrt{2} \notin (-\infty; 1)$.

Ответ: при $a \in (-\infty; 1) \cup \left\{6 - 2\sqrt{6}; 6 + 2\sqrt{6}\right\}$ уравнение $\sqrt{5ax+3} = 5x + 3$ имеет только один корень.

2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(x+4a)\sqrt{x-4a-32} = 0$ имеет единственное решение[1].

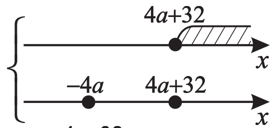
Уравнение $(x+4a)\sqrt{x-4a-32} = 0$ равносильно

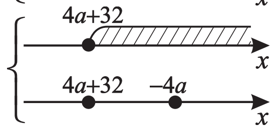
$$\begin{cases} x - 4a - 32 \geqslant 0 \\ (x+4a)(x-4a-32) = 0 \end{cases}.$$

[1]Подробнее см. Шахмейстер А. Х. Уравнения и неравенства с параметрами. СПб.: «ЧеРо-на-Неве», 2006.

Пусть $4a + 32 \geqslant -4a$, тогда $a \geqslant -4$,

и существует только один корень.





Если $a < -4$, то есть два корня.

Если $a = -4$, то корни совпадают.

Ответ: при $a \geqslant -4$ уравнение $(x + 4a)\sqrt{x - 4a - 32} = 0$ имеет единственное решение.

3. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left(ax^2 - \left(a^2 + 1\right)x + a\right)\sqrt{x + 4} = 0$ имеет только два решения.

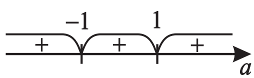
Уравнение $\left(ax^2 - \left(a^2 + 1\right)x + a\right)\sqrt{x + 4} = 0$ равносильно

$$\begin{cases} x \geqslant -4 \\ \left(ax^2 - \left(a^2 + 1\right)x + a\right)(x + 4) = 0 \end{cases}.$$

Исследуем $ax^2 - \left(a^2 + 1\right)x + a = 0$.

1) $a \neq 0$; $D = \left(a^2 + 1\right)^2 - 4a^2 = \left(a^2 + 1 + 2a\right)\left(a^2 + 1 - 2a\right) =$

$= (a + 1)^2 (a - 1)^2$; $D \geqslant 0$ при любых значениях параметра a.



$x_{1,2} = \dfrac{a^2 + 1 \pm \left(a^2 - 1\right)}{2a}$; $\left[\begin{array}{l} x = a \\ x = \dfrac{1}{a} \end{array}\right.$. Положим $x_1 = a$; $x_2 = \dfrac{1}{a}$.

а) Пусть $x_1 = -4$, что возможно при $a = -4$.

Тогда $x_2 = -\dfrac{1}{4}$.

б) Пусть $x_2 = -4$, что возможно при $a = -\frac{1}{4}$.

Тогда $x_1 = -\frac{1}{4}$.

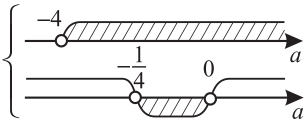
2) $a = 1$; тогда $x_1 = x_2 = 1$ $(1 \geqslant -4)$ и $x_3 = -4$.

3) $a = -1$; тогда $x_1 = x_2 = -1$ $(-1 \geqslant -4)$ и $x_3 = -4$.

4) $a = 0$; $-x(x+4) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = -4$.

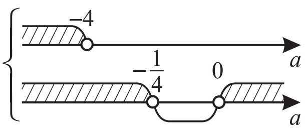
Так как один корень $x = -4$ есть всегда, то необходимо выяснить, при каких a один из корней $ax^2 - \left(a^2+1\right)x + a = 0$ подходит условию $x \geqslant -4$, а другой нет.

5) $\begin{cases} a > -4 \\ \frac{1}{a} < -4 \end{cases}$; $\begin{cases} a > -4 \\ \frac{1+4a}{a} < 0 \end{cases}$;



$a \in \left(-\frac{1}{4}; 0\right)$.

6) $\begin{cases} a < -4 \\ \frac{1}{a} > -4 \end{cases}$; $\begin{cases} a < -4 \\ \frac{1+4a}{a} > 0 \end{cases}$;



$a \in (-\infty; -4)$.

Ответ: при $a \in (-\infty; -4] \cup \left[-\frac{1}{4}; 0\right] \cup \{-1; 1\}$ уравнение $\left(ax^2 - \left(a^2+1\right)x + a\right)\sqrt{x+4} = 0$ имеет только два решения.

4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x^2+7x} - x = \frac{a}{4}$ имеет единственное решение.

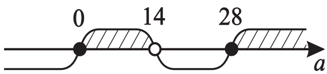
Уравнение $\sqrt{x^2+7x} - x = \frac{a}{4}$ равносильно

$$\begin{cases} x + \frac{a}{4} \geqslant 0 \\ x^2 + 7x = \left(x + \frac{a}{4}\right)^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geqslant -\frac{a}{4} \\ \underline{x^2} + 7x = \underline{x^2} + \frac{ax}{2} + \frac{a^2}{16} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \geqslant -\dfrac{a}{4} \\ 112x - 8ax = a^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geqslant -\dfrac{a}{4} \\ 8x\left(14 - a\right) = a^2 \end{cases}.$$

Пусть $a \neq 14$, тогда $\begin{cases} x \geqslant -\dfrac{a}{4} \\ x = \dfrac{a^2}{8(14-a)} \end{cases}$.

Значит $\dfrac{a^2}{8(14-a)} \geqslant -\dfrac{a}{4}$; $\dfrac{a^2+28a-2a^2}{4(14-a)} \geqslant 0$; $\dfrac{a(a-28)}{4(a-14)} \geqslant 0$.



При $a = 14$ решения нет.

Ответ: при $a \in \left[0; 14\right) \cup \left[28; \infty\right)$ уравнение $\sqrt{x^2 + 7x} - x = \dfrac{a}{4}$ имеет единственное решение.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{7x^2 + 2ax - 5a^2} = x + a$ имеет только два решения.

Уравнение $\sqrt{7x^2 + 2ax - 5a^2} = x + a$ равносильно

$$\begin{cases} x + a \geqslant 0 \\ 7x^2 + 2ax - 5a^2 = x^2 + 2ax + a^2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \geqslant -a \\ 6x^2 = 6a^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geqslant -a \\ \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = -a \end{array}\right. \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -a \\ x = a \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant -a \\ x = -a \end{cases} \end{array}\right..$$

Чтобы было два корня, нужно $\begin{cases} a \geqslant -a \\ -a \geqslant -a \end{cases}$; $a \geqslant 0$. Но при

$a = 0$ $\quad \sqrt{7}x = |x|$, и существует только один корень.

Ответ: при $a > 0$ уравнение $\sqrt{7x^2 + 2ax - 5a^2} = x + a$ имеет только два решения.

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x^2-4ax-7a}=3-x$ решения не имеет.

Уравнение $\sqrt{x^2-4ax-7a}=3-x$ равносильно

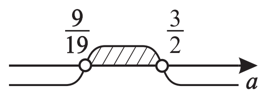
$$\begin{cases}3-x\geqslant 0\\ x^2-4ax-7a=9-6x+x^2\end{cases},\quad \text{т.е.}\quad \begin{cases}x\leqslant 3\\ 2(3-2a)\,x=7a+9\end{cases}.$$

а) Пусть $a\neq 1,5$; $\begin{cases}x\leqslant 3\\ x=\dfrac{7a+9}{2(3-2a)}\end{cases}.$

Значит, если $\dfrac{7a+9}{2(3-2a)}>3$,

то решения не попадают в $D(y)$.

$\dfrac{7a+9-18+12a}{2(3-2a)}>0$; $\dfrac{19a-9}{2(3-2a)}>0$.



б) $a=\dfrac{3}{2}$; $0\cdot x=114$; $x\in\varnothing$.

Ответ: при $a\in\left(\dfrac{9}{19};\dfrac{3}{2}\right]$ уравнение $\sqrt{x^2-4ax-7a}=3-x$ решения не имеет.

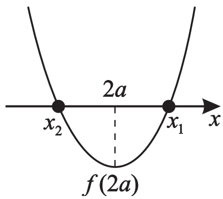
7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{9-x^2}=x-2a$ имеет единственное решение.

Уравнение $\sqrt{9-x^2}=x-2a$ равносильно

$$\begin{cases}x-2a\geqslant 0\\ 9-x^2=x^2-4ax+4a^2\end{cases},\ \text{т.е.}\ \begin{cases}x\geqslant 2a\\ 2x^2-4ax+4a^2-9=0\end{cases}.$$

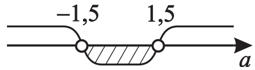
Чтобы квадратное уравнение имело только один корень необходимо, чтобы либо один из корней был меньше $2a$, либо $D=0$ и $x_1=x_2\geqslant 2a$.

а) Иллюстрируем графически необходимый случай.



Для $f\left(x\right)=2x^2-4ax+4a^2-9$ $\quad f\left(2a\right)<0$,

т.е. $8a^2-8a^2+4a^2-9<0$.



б) $D=4a^2-8a^2+18=2\left(9-2a^2\right)$; при $D=0$

$x_1=x_2=a\geqslant 2a$ только при $a\leqslant 0$, но $D=0$, если

$$\left[\begin{array}{l} a=\sqrt{4{,}5}\notin\left(-\infty;0\right] \\ a=-\sqrt{4{,}5} \end{array}\right. .$$

Ответ: при $a\in\left(-1{,}5;1{,}5\right)\cup\left\{-\sqrt{4{,}5}\right\}$ уравнение $\sqrt{9-x^2}=x-2a$ имеет единственное решение.

8. При каких значениях параметра a график $y=\sqrt{3-x}+\sqrt{a+x}$ симметричен относительно оси oy?

Это значит, что $y=f\left(x\right)$ – чётная, т.е. $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$.

$f\left(-x\right)=\sqrt{3+x}+\sqrt{a-x}$, тогда $\sqrt{3+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{3-x}+\sqrt{a+x}$.

$3+x+2\sqrt{\left(3+x\right)\left(a-x\right)}+a-x=3-x+2\sqrt{\left(3-x\right)\left(a+x\right)}+a+x$;

$\sqrt{\left(3+x\right)\left(a-x\right)}=\sqrt{\left(3-x\right)\left(a+x\right)}$;

$\left(3+x\right)\left(a-x\right)=\left(3-x\right)\left(a+x\right)$;

$-x^2+ax-3x+3a=-x^2-ax+3x+3a$;

$6x-2ax=0$; $\quad 2x\left(3-a\right)=0$.

При $a=3$ утверждение верно для любых $x\in D\left(y\right)$.

Ответ: при $a=3$ график $y=f\left(x\right)$ симметричен относительно оси oy.

9. Сколько корней в зависимости от параметра a имеет уравнение $\sqrt{2\left|x\right| - x^2} = a$?

$\sqrt{2\left|x\right| - x^2} = a$; $\begin{cases} a \geqslant 0 \\ x^2 - 2\left|x\right| + a^2 = 0 \end{cases}$; $D = 1 - a^2$.

а) $\begin{cases} D = 0 \\ a \geqslant 0 \end{cases}$ при $a = 1$;

$\exists$ один корень $\left|x\right| = 1$, т.е. два решения $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

б) $\begin{cases} D > 0 \\ a \geqslant 0 \end{cases}$ $0 \leqslant a < 1$; существуют два корня $\left|x\right|_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - a^2}$.

Проанализируем знаки корней уравнения $x^2 - 2\left|x\right| + a^2 = 0$.

Так как $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$, то $\begin{cases} a^2 > 0 \\ 2 > 0 \end{cases}$, что верно для $\forall a \neq 0$.

Значит при $0 < a < 1$ оба корня положительны;

$\exists$ два корня для $\left|x\right|$, т.е. четыре для x, и остаётся проверить случай $a = 0$.

$\sqrt{2\left|x\right| - x^2} = 0$; $\left|x\right|\left(2 - \left|x\right|\right) = 0$,

т.е. имеем три корня $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Ответ: в уравнении $\sqrt{2\left|x\right| - x^2} = a$

1) при $a \in \left(0; 1\right)$ существуют четыре корня;
2) при $a = 0$ существуют три корня;
3) при $a = 1$ существуют два корня;
4) при $a \in \left(1; \infty\right)$ корней нет;
5) при $a \in \left(-\infty; 0\right)$ корней нет.

10. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+a}=x$ имеет только два решения?

$$\sqrt{x+a}=x \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x\geqslant 0 \\ x+a=x^2 \end{cases};\quad \begin{cases} x\geqslant 0 \\ x^2-x-a=0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x\geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2} \end{array}\right. \end{cases};\quad \begin{cases} x\geqslant 0 \\ D=1+4a>0 \end{cases};\quad \begin{cases} x\geqslant 0 \\ a>-\dfrac{1}{4} \end{cases} \text{ – существуют}$$

два корня, но они должны быть оба положительны,

что возможно, если $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}>0 \\ \dfrac{c}{a}>0 \\ D>0 \end{cases};\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}>0 \\ -a>0 \\ a>-\dfrac{1}{4} \end{cases};\quad a\in\left(-\dfrac{1}{4};0\right).$

Ответ: при $a\in\left(-\dfrac{1}{4};0\right)$ существуют только два корня уравнения $\sqrt{x+a}=x$.

11. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+a}=x+2$ имеет единственный корень?

$$\begin{cases} x+2\geqslant 0 \\ x+a=(x+2)^2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x\geqslant -2 \\ x^2+4x+4-x-a=0 \end{cases};\quad \begin{cases} x\geqslant -2 \\ x^2+3x+4-a=0 \end{cases}.$$

Уравнение имеет единственный корень, если

а) $D=0$ и $x_1=x_2\geqslant -2$;

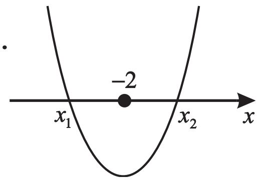
б) $D>0$ и один из корней меньше -2.

а) $\begin{cases} x \geqslant -2 \\ D = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \geqslant -2 \\ D = 9 - 4(4-a) = 0 \end{cases}$;

$D = 0$ при $a = 1{,}75$; $x_1 = x_2 = \dfrac{-3 \pm 0}{2} \in [-2; \infty)$;

б) $\begin{cases} x \geqslant -2 \\ D > 0 \end{cases}$, в данном случае один корень, только если

$f(-2) < 0$. $\left(f(x) = x^2 + 3x + 4 - a\right)$.



$(-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 4 - a < 0$; $4 - 6 + 4 - a < 0$; $a > 2$.

Ответ: при $\left[\begin{array}{l} a = 1{,}75 \\ a > 2 \end{array}\right.$ уравнение $\sqrt{x+a} = x + 2$ имеет единственное решение.

12. $\sqrt{\dfrac{x-7}{x+3}} \cdot \dfrac{9 + (x-3)\sqrt{x^2 - 4x - 21} - x^2}{x^2 - (x+7)\sqrt{x^2 - 4x - 21} - 49} = a$.

При каких значениях параметра a абсолютная величина разности $|a - 0{,}7|$ будет наименьшей для $x \in \mathbb{N}$?

Так как $x \in \mathbb{N}$, то $D(y) = \{7; 8; 9 \ldots\}$, тогда

$$\sqrt{\frac{x-7}{x+3}} \cdot \frac{9 + (x-3)\sqrt{x^2 - 4x - 21} - x^2}{x^2 - (x+7)\sqrt{x^2 - 4x - 21} - 49} =$$

$$= \frac{\sqrt{x-7}\left(9 - x^2 + (x-3)\sqrt{x^2 - 4x - 21}\right)}{\sqrt{x+3}\left(x^2 - 49 - (x+7)\sqrt{x^2 - 4x - 21}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{x-7}\,(x-3)\sqrt{x+3}\left(-\sqrt{x+3} + \sqrt{x-7}\right)}{\sqrt{x+3} \cdot (x+7)\sqrt{x-7}\left(\sqrt{x-7} - \sqrt{x+3}\right)} = \frac{x-3}{x+7} = 1 - \frac{10}{x+7}.$$

Домножать на $\left(\sqrt{x-7}-\sqrt{x+3}\right)$ можно, так как $\sqrt{x-7}-\sqrt{x+3}\neq 0$, иначе $-7=3$, но это ложно.

Выясним, при каком значении x $a=0{,}7$.

$1-\frac{10}{x+7}=0{,}7$; $\frac{10}{x+3}=0{,}3$, т.е. $100=3x+9$;

$x=30\frac{1}{3}$, но $x\in\mathbb{N}$.

а) Пусть $x=30$; тогда $a=\frac{30-3}{30+7}=\frac{27}{37}$.

Рассмотрим $\left|a-0{,}7\right|$, она равна $\left|\frac{27}{37}-\frac{7}{10}\right|=\frac{11}{370}$.

б) Пусть $x=31$; тогда $a=\frac{31-3}{31+7}=\frac{28}{38}=\frac{14}{19}$.

Рассмотрим $\left|a-0{,}7\right|$, она равна $\left|\frac{14}{19}-\frac{7}{10}\right|=\frac{7}{190}$.

Очевидно, что $\frac{11}{370}<\frac{7}{190}$, поэтому при $a=\frac{27}{37}$ абсолютная величина разности $\left|a-0{,}7\right|=\frac{11}{370}$ будет наименьшей для $x\in\mathbb{N}$.

Ответ: при $a=\frac{27}{37}$ абсолютная величина разности

$\left|a-0{,}7\right|$, где $a=\sqrt{\frac{x-7}{x+3}}\cdot\frac{9+(x-3)\sqrt{x^2-4x-21}-x^2}{x^2-(x+7)\sqrt{x^2-4x-21}-49}$,

будет наименьшей для $x\in\{7;\,8;\,9;\,\ldots\}$.

Тренировочная работа 4

1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{3ax+5a}=3x+5$ имеет только одно решение.

2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left(ax^2-\left(a^2+12\right)x+12a\right)\sqrt{x+5}=0$ имеет только два решения.

3. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x^2+8x}-x=\frac{a}{2}$ имеет единственное решение.

4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{5x^2+6ax-27a^2}=x+3a$ имеет только два решения.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{25-x^2}=x-a$ имеет единственное решение.

6. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{2-x}+3=ax^2$ в зависимости от значений параметра a?

7. При каких значениях параметра a, где

$$a=\sqrt{\frac{x-3}{x+1}}\cdot\frac{1+(x-1)\sqrt{x^2-2x-3}-x^2}{x^2-(x+3)\sqrt{x^2-2x-3}-9},$$ абсолютная величина разности $|a-0{,}66|$ будет наименьшей для $x\in\mathbb{N}$?

8. При каких значениях параметра a

$y=g\left(x\right)=\sqrt{\left(x-a\right)^2-\left(x-a\right)+4}$ чётная функция?

Решение тренировочной работы 4

1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{3ax+5a}=3x+5$ имеет только одно решение.

Уравнение $\sqrt{3ax+5a}=3x+5$ равносильно

$$\begin{cases}3x+5\geqslant 0\\ 3ax+5a=(3x+5)^2\end{cases};\quad \begin{cases}x\geqslant -1\dfrac{2}{3}\\ 9x^2+3(10-a)x+25-5a=0\end{cases}.$$

Это уравнение имеет только одно решение, если

а) $D=0$;

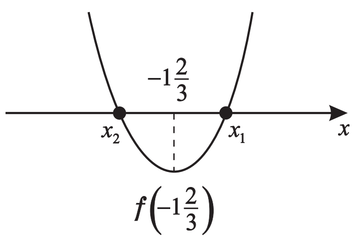
$D=9(10-a)^2-9\cdot 4(25-5a)=$

$=9\left(a^2-\underline{20a}+\underline{\underline{100}}-\underline{\underline{100}}+\underline{20a}\right)=9a^2$.

$D=0$ при $a=0$; $x_1=x_2=\dfrac{3(a-10)}{2\cdot 9}=\dfrac{a-10}{6}$, т.е. $x=-\dfrac{5}{3}$;

б) только один корень удовлетворяет условию $x\geqslant -1\dfrac{2}{3}$.

Тогда при $f(x)=9x^2+3(10-a)x+25-5a$, если $f\left(-1\dfrac{2}{3}\right)<0$, то один из корней больше $-1\dfrac{2}{3}$, а другой меньше. Графически это выглядит так.



$f\left(-\dfrac{5}{3}\right)=9\cdot\left(\dfrac{5}{3}\right)^2-3\cdot\dfrac{5}{3}(10-a)+25-5a$;

$25-50+5a+25-5a<0$; $\quad 0<0$ ложно.

Ответ: при $a=0$ уравнение $\sqrt{3ax+5a}=3x+5$ имеет только одно решение.

2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left(ax^2-\left(a^2+12\right)x+12a\right)\sqrt{x+5}=0$ имеет только два решения.

Уравнение $\left(ax^2-\left(a^2+12\right)x+12a\right)\sqrt{x+5}=0$

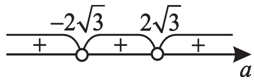
равносильно $\begin{cases} x \geqslant -5 \\ \left(ax^2-\left(a^2+12\right)x+12a\right)\left(x+5\right)=0 \end{cases}$.

Исследуем $ax^2-\left(a^2+12\right)x+12a=0$.

1) $a \neq 0$;

$D=\left(a^2+12\right)^2-48a^2=a^4+24a^2+12^2-48a^2=$

$=\left(a^2-12\right)^2>0$;



$x_{1,2}=\dfrac{a^2+12\pm\left(a^2-12\right)}{2a}$; $\left[\begin{array}{l} x=a \\ x=\dfrac{12}{a} \end{array}\right.$ или $\begin{array}{l} x_1=a; \\ x_2=\dfrac{12}{a}. \end{array}$

Пусть $x=-5$, чтобы было только два корня.

Рассмотрим

а) $x_1=a=-5$, тогда $a=-5$; $x_1=-5$; $x_2=-2{,}4 \geqslant -5$;

б) $x_2=\dfrac{12}{a}=-5$, тогда при $a=-2{,}4$ $x_2=-5$;

$x_1=-2{,}4 \geqslant -5$.

2) $D=0$.

а) Пусть $a=2\sqrt{3}$, тогда $x_1=x_2=\dfrac{24}{4\sqrt{3}}=2\sqrt{3} \geqslant -5$;

$x_3=-5$.

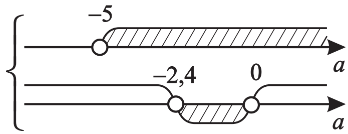
б) Пусть $a=-2\sqrt{3}$, тогда $x_1=x_2=\dfrac{24}{-4\sqrt{3}}=-2\sqrt{3} \geqslant -5$;

$x_3=-5$.

3) $a = 0$; $-12x\left(x+5\right) = 0$; $x_1 = -5$; $x_2 = 0 \geqslant -5$; $x_3 = -5$.

4) Выясним, когда один из корней уравнения

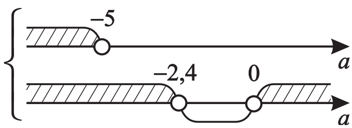
$ax^2 - \left(a^2 + 12\right)x + 12a = 0$ меньше -5.

а) $\begin{cases} a > -5 \\ \dfrac{12}{a} < -5 \end{cases}$; 

при $a \in \left(-2{,}4;\ 0\right)$

$x_1 = a \in \left(-2{,}4;\ 0\right) \subset \left[-5;\ \infty\right)$;

$x_2 = \dfrac{12}{a} \in \left(-\infty;\ -5\right) \not\subset \left[-5;\ \infty\right)$.

б) $\begin{cases} a < -5 \\ \dfrac{12}{a} > -5 \end{cases}$; 

при $a \in \left(-\infty;\ -5\right)$

$x_1 = a \notin \left[-5;\ \infty\right)$; $x_2 = \dfrac{12}{a} \in \left(-5;\ \infty\right)$.

Ответ: при $a \in \left(-\infty;\ -5\right] \cup \left\{-2\sqrt{3};\ 2\sqrt{3}\right\} \cup \left[-2{,}4;\ 0\right]$

уравнение $\left(ax^2 - \left(a^2 + 12\right)x + 12a\right)\sqrt{x+5} = 0$

имеет только два корня.

3. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x^2 + 8x} - x = \dfrac{a}{2}$ имеет единственное решение.

Уравнение $\sqrt{x^2 + 8x} - x = \dfrac{a}{2}$ равносильно

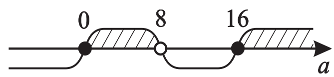
$$\begin{cases} x + \dfrac{a}{2} \geqslant 0 \\ x^2 + 8x = \left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geqslant -\dfrac{a}{2} \\ x^2 + 8x = x^2 + ax + \dfrac{a^2}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geqslant -\dfrac{a}{2} \\ 4x\left(8 - a\right) = a^2 \end{cases}.$$

Пусть $a \neq 8$; $\begin{cases} x \geqslant -\dfrac{a}{2} \\ x = \dfrac{a^2}{4(8-a)} \end{cases}$.

Чтобы выполнялись условия равносильности,

необходимо, чтобы $\dfrac{a^2}{4(8-a)} \geqslant -\dfrac{a}{2}$;

$\dfrac{a^2+16a-2a^2}{4(8-a)} \geqslant 0$; $\dfrac{a(a-16)}{4(a-8)} \geqslant 0$.



При $a = 8$ решения нет.

Ответ: при $a \in [0;\, 8) \cup [16;\, \infty)$ уравнение

$\sqrt{x^2 + 8x} - x = \dfrac{a}{2}$ имеет единственное решение.

4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{5x^2 + 6ax - 27a^2} = x + 3a$ имеет только два решения.

Уравнение $\sqrt{5x^2 + 6ax - 27a^2} = x + 3a$ равносильно

$\begin{cases} x + 3a \geqslant 0 \\ 5x^2 + 6ax - 27a^2 = x^2 + 6xa + 9a^2 \end{cases}$; $\begin{cases} x \geqslant -3a \\ x^2 = 9a^2 \end{cases}$;

$\begin{cases} x \geqslant -3a \\ \left[\begin{array}{l} x = 3a \\ x = -3a \end{array}\right. \end{cases}$. Тогда, чтобы было два корня, необходимо

$\begin{cases} 3a \geqslant -3a \\ -3a \geqslant -3a \end{cases}$; $a \geqslant 0$,

но при $a = 0$ $\sqrt{5}\,|x| = x$, $\exists$ только один корень.

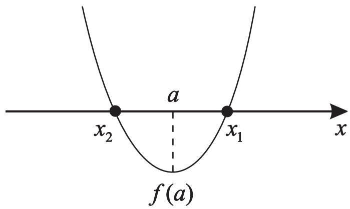
Ответ: при $a > 0$ уравнение $\sqrt{5x^2 + 6ax - 27a^2} = x + 3a$ имеет только два решения.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{25-x^2}=x-a$ имеет единственное решение.

Уравнение $\sqrt{25-x^2}=x-a$ равносильно

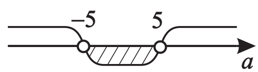
$$\begin{cases} x \geqslant a \\ 25-x^2=x^2-2ax+a^2 \end{cases}, \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} x \geqslant a \\ 2x^2-2ax+a^2-25=0 \end{cases}.$$

а) Иллюстрируем графически случай, когда один из корней не подходит под условие $x \geqslant a$.



Тогда для $f(x)=2x^2-2ax+a^2-25$,
если $f(a)<0$, то значит только один корень удовлетворяет условию $x \geqslant a$.

Итак, $2a^2-2a^2+a^2-25<0$,
т.е. при $a \in (-5;5)$ $x_1 \geqslant a$.



б) $D=a^2-2a^2+50=50-a^2$;

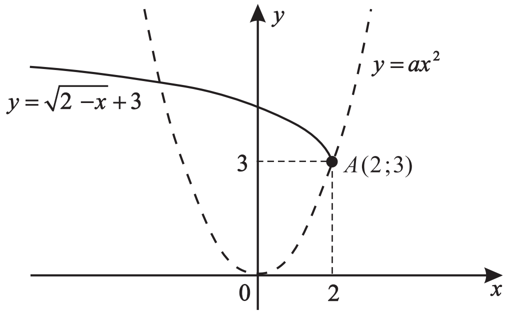
$$D=0; \quad \left[\begin{array}{l} a=5\sqrt{2} \\ a=-5\sqrt{2} \end{array}\right.;$$

$x_1=x_2=\dfrac{a}{2} \geqslant a$ только при $a \leqslant 0$, тогда
$a=5\sqrt{2} \notin (-\infty;0]$; $\quad a=-5\sqrt{2} \in (-\infty;0]$.

Ответ: при $a \in (-5;5) \cup \left\{-5\sqrt{2}\right\}$ уравнение
$\sqrt{25-x^2}=x-a$ имеет единственное решение.

6. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{2-x}+3=ax^2$ в зависимости от значения параметра a?

Решим этот вопрос графически.



а) $y=\sqrt{2-x}+3$ – его можно построить методом преобразований.

$y_1=\sqrt{x}$;

$y_2=\sqrt{-x}$ симметричен относительно oy (y_1);

$y_3=\sqrt{-(x-2)}$ – сдвиг вправо на 2 (y_2);

$y_4=\sqrt{2-x}+3$ – сдвиг вверх на 3 (y_3);

б) $y=ax^2$ – парабола с вершиной в начале координат.

Рассмотрим $A(2;3)$; если $A\in\Gamma\,(y=ax^2)$,

то $3=a\cdot 4$; $a=0{,}75$.

Тогда для $y=0{,}75x^2$ существуют два корня в уравнении $\sqrt{2-x}+3=0{,}75x^2$. Тем более для $\forall a\geqslant 0{,}75$ $\exists$ два корня в уравнении $\sqrt{2-x}+3=ax^2$.

Из графика видно, что при $\begin{cases} a<0{,}75 \\ a>0 \end{cases}$ $\exists$ один корень,

а при $a\leqslant 0$ корней нет.

Ответ: в уравнении $\sqrt{2-x}+3=ax^2$

1) при $a\in[0{,}75;\infty)$ $\exists$ два корня;

2) при $a\in(0;0{,}75)$ $\exists$ один корень;

3) при $a\in(-\infty;0]$ корней нет.

7. При каких значениях параметра a, где

$$a = \sqrt{\frac{x-3}{x+1}} \cdot \frac{1+(x-1)\sqrt{x^2-2x-3}-x^2}{x^2-(x+3)\sqrt{x^2-2x-3}-9},$$ абсолютная величина

разности $|a-0{,}66|$ будет наименьшей для $x \in \mathbb{N}$?

Так как $x \in \mathbb{N}$, то $D(y) = \{3; 4; 5...\}$, тогда

$$\sqrt{\frac{x-3}{x+1}} \cdot \frac{1+(x-1)\sqrt{x^2-2x-3}-x^2}{x^2-(x+3)\sqrt{x^2-2x-3}-9} =$$

$$= \sqrt{\frac{x-3}{x+1}} \cdot \frac{(1+x)(1-x)+(x-1)\sqrt{x^2-2x-3}}{(x-3)(x+3)-(x+3)\sqrt{x^2-2x-3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x-3}\cdot(x-1)\sqrt{1+x}\left(-\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}\right)}{\sqrt{x+1}\cdot(x+3)\sqrt{x-3}\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+1}\right)} = \frac{x-1}{x+3} = a.$$

Так как $\sqrt{x-3} = \sqrt{x+1}$ не имеет решения, то можно сократить множители $\sqrt{x-3} - \sqrt{x+1}$.

Выясним, при каких значениях x a равно $0{,}66$.

$\frac{x-1}{x+3} = 0{,}66$; $\quad x-1 = 0{,}66x + 1{,}98$;

$0{,}34x = 2{,}98$; $\quad x = \frac{298}{34}$, $\quad$ т.е. $x = 8\frac{13}{17}$, но $x \in \mathbb{N}$.

а) Пусть $x = 8$; тогда $a = \frac{8-1}{8+3} = \frac{7}{11}$.

Рассмотрим $|a-0{,}66|$, она равна $\left|\frac{7}{11} - \frac{33}{50}\right| = \frac{13}{550}$.

б) Пусть $x = 9$; тогда $a = \frac{9-1}{9+3} = \frac{2}{3}$.

Рассмотрим $|a-0{,}66|$, она равна $\left|\frac{2}{3} - \frac{33}{50}\right| = \frac{1}{150}$.

Так как $\frac{1}{150} < \frac{13}{550}$, то при $a = \frac{2}{3}$ абсолютная величина разности $|a - 0{,}66|$ будет наименьшей для $x \in \mathbb{N}$.

Ответ: при $a = \frac{2}{3}$ абсолютная величина разности

$|a - 0{,}66|$, где $a = \sqrt{\frac{x-3}{x+1}} \cdot \frac{1+(x-1)\sqrt{x^2-2x-3}-x^2}{x^2-(x+3)\sqrt{x^2-2x-3}-9}$, будет наименьшей для $x \in \mathbb{N}$.

8. При каких значениях параметра a

$y = g(x) = \sqrt{(x-a)^2 - (x-a) + 4}$ чётная функция?

$$g(x) = \sqrt{(x-a)^2 - (x-a) + 4} = \sqrt{x^2 - 2ax + a^2 - x + a + 4} =$$

$$= \sqrt{x^2 - (2a+1)x + a^2 + a + 4}.$$

$$g(-x) = \sqrt{(-x)^2 - (2a+1)(-x) + a^2 + a + 4} =$$

$$= \sqrt{x^2 + (2a+1)x + a^2 + a + 4};$$

$$g(x) = g(-x);$$

$$\sqrt{x^2 - (2a+1)x + a^2 + a + 4} = \sqrt{x^2 + (2a+1)x + a^2 + a + 4};$$

$$x^2 - (2a+1)x + a^2 + a + 4 = x^2 + (2a+1)x + a^2 + a + 4;$$

$$2(2a+1)x = 0.$$

Если $a = -0{,}5$, то $\forall x$ – есть решение.

Ответ: при $a = -0{,}5$ $g(x) = \sqrt{(x-a)^2 - (x-a) + 4}$ является чётной.

5

Иррациональные неравенства[1]

Практикум 5

1. Найдите все значения параметра a, при которых множеством всех решений неравенства

$\left(x-3a-2\right)\sqrt{x+3a-5}\leqslant 0$ является отрезок длины $|a|$.

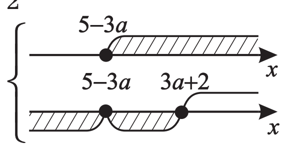
Неравенство $\left(x-3a-2\right)\sqrt{x+3a-5}\leqslant 0$ равносильно

$$\begin{cases} x+3a-5\geqslant 0 \\ \left(x-3a-2\right)\left(x+3a-5\right)^2\leqslant 0 \end{cases},$$

т.е. $\begin{cases} x\geqslant 5-3a \\ \left(x-\left(3a+2\right)\right)\left(x-\left(5-3a\right)\right)^2\leqslant 0 \end{cases}.$

а) Если $3a+2\geqslant 5-3a$, где $\left(3a+2\right)$ и $\left(5-3a\right)$ – корни

неравенства, т.е. при $a\geqslant\dfrac{1}{2}$, то решение системы

можно иллюстрировать. 

Значит $5-3a\leqslant x\leqslant 3a+2$ – отрезок.

---

[1]Подробнее см. Шахмейстер А. Х. Иррациональные уравнения и неравенства. СПб.: «Петроглиф», 2008. Гл. 2.

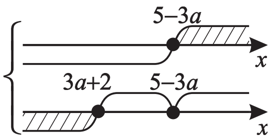
Так как $\left|3a+2-(5-3a)\right|=|a|$, то $|6a-3|=|a|$,

что равносильно $(6a-3-a)(6a-3+a)=0$;

$(5a-3)(7a-3)=0$;

$$\left[\begin{array}{l} a=\frac{3}{5}\geqslant\frac{1}{2} \\ a=\frac{3}{7}<\frac{1}{2} \end{array}\right.;\quad a=\frac{3}{7}<\frac{1}{2}\ \text{ – не подходит.}$$

б) Если $3a+2<5-3a$, то общего решения в виде отрезка нет. Это можно иллюстрировать.



Ответ: при $a=\frac{3}{5}$ решением неравенства

$(x-3a-2)\sqrt{x+3a-5}\leqslant 0$ является

отрезок длины $|a|=\frac{3}{5}$, т.е. $x\in\left[3\frac{1}{5};\,3\frac{4}{5}\right]$.

2. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $\sqrt{4a^2-x^2}\geqslant|x-2a|$ имеет единственное решение.

Неравенство $\sqrt{4a^2-x^2}\geqslant|x-2a|$ равносильно

$4a^2-x^2\geqslant(x-2a)^2$,

т.е. $x^2-4ax+\underline{4a^2}\leqslant\underline{4a^2}-x^2$; $2x^2-4ax\leqslant 0$.

Единственное решение возможно, если $D=0$;

$D=4a^2=0$ при $a=0$.

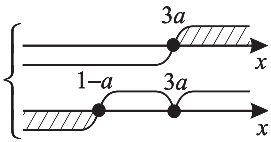
Ответ: при $a=0$ неравенство $\sqrt{4a^2-x^2}\geqslant|x-2a|$ имеет единственное решение $(x=0)$.

3. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $\left(x+a-1\right)\sqrt{x-3a}\leqslant 0$ имеет единственное решение.

Неравенство $\left(x+a-1\right)\sqrt{x-3a}\leqslant 0$ равносильно

$$\begin{cases} x\geqslant 3a \\ \left(x+a-1\right)\left(x-3a\right)^2\leqslant 0 \end{cases}.$$

а) Пусть $3a\geqslant 1-a$, т.е. $a\geqslant \frac{1}{4}$, тогда решение системы принимает следующий вид.



Значит только $x=3a$ решение неравенства.

б) Если $3a<1-a$, то решение не единственное.

Ответ: при $a\in\left[\frac{1}{4};\infty\right)$ неравенство $\left(x+a-1\right)\sqrt{x-3a}\leqslant 0$ имеет единственное решение.

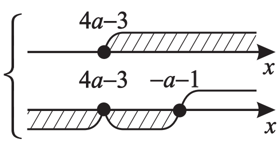
4. Найдите все значения параметра a, при которых решением неравенства $\left(x+a+1\right)\sqrt{x-4a+3}\leqslant 0$ является отрезок.

Неравенство $\left(x+a+1\right)\sqrt{x-4a+3}\leqslant 0$ равносильно

$$\begin{cases} x-4a+3\geqslant 0 \\ \left(x+a+1\right)\left(x-4a+3\right)^2\leqslant 0 \end{cases}.$$

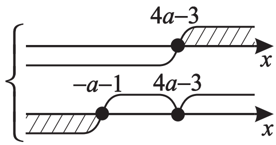
а) Пусть $4a-3<-a-1$, т.е. $a<0{,}4$.

Решение системы неравенств графически будет выглядеть так.



Тогда неравенство приобретёт вид $4a - 3 \leqslant x \leqslant -a - 1$.
Итак, при $a < 0{,}4$ $x \in \left[4a - 3; -a - 1\right]$.

б) При $a \geqslant 0{,}4$ система неравенств будет иметь следующий вид.



$x = 4a - 3$.

Ответ: при $a < 0{,}4$ решением неравенства $(x + a + 1)\sqrt{x - 4a + 3} \leqslant 0$ является отрезок $\left[4a - 3; -a - 1\right]$.

5. При каких значениях параметра a решением неравенства $\sqrt{2x + 6} \geqslant a\sqrt{x - 2}$ является луч?

$$D(\text{Н}): \begin{cases} x - 2 \geqslant 0 \\ 2x + 6 \geqslant 0 \end{cases}; \; x \geqslant 2;$$

$$1) \begin{cases} a \geqslant 0 \\ x \geqslant 2 \\ 2x + 6 \geqslant a^2\,(x - 2) \end{cases}; \quad \begin{cases} a \geqslant 0 \\ x \geqslant 2 \\ \left(a^2 - 2\right) x \leqslant 6 + 2a^2 \end{cases}.$$

$$\text{а)} \begin{cases} a \geqslant 0 \\ x \geqslant 2 \\ a > \sqrt{2} \\ x \leqslant \dfrac{2a^2+6}{a^2-2} \end{cases}, \text{ тогда } \frac{2a^2+6}{a^2-2} \geqslant 2; \text{ значит } 2a^2 + 6 \geqslant 2\left(a^2 - 2\right).$$

Отсюда следует $6 \geqslant -4$ – истина.

$$\begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant \dfrac{6+2a^2}{a^2-2} \\ a > \sqrt{2} \end{cases}, \text{ но это не луч.}$$

б) $\begin{cases} a \geqslant 0 \\ x \geqslant 2 \\ a < \sqrt{2} \\ x \geqslant \dfrac{2a^2+6}{a^2-2} \end{cases}$, тогда $\sqrt{2} > a \geqslant 0$ и $\dfrac{6+2a^2}{a^2-2} < 0$

$\left(a^2 - 2 < 0\right)$.

Значит $x \geqslant 2$ при $\sqrt{2} > a \geqslant 0$.

2) При $a < 0$ $\sqrt{2x+6} \geqslant a\sqrt{x-2}$ справедливо для $\forall x \in D\left(\text{Н}\right)$, т.е. $x \geqslant 2$.

При $a < 0$ – это луч.

Ответ: при $a < \sqrt{2}$ решением неравенства $\sqrt{2x+6} \geqslant a\sqrt{x-2}$ является луч $x \in \left[2; \infty\right)$.

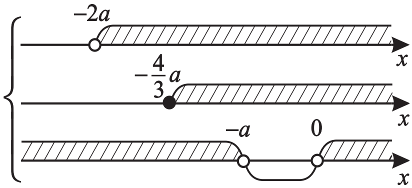
6. Решите и исследуйте неравенство $\sqrt{3ax+4a^2} < x + 2a$ с параметром.

Данное неравенство равносильно системе

$\begin{cases} 3ax + 4a^2 \geqslant 0 \\ x + 2a > 0 \\ 3ax + 4a^2 < \left(x+2a\right)^2 \end{cases}$; $\begin{cases} a\left(3x+4a\right) \geqslant 0 \\ x > -2a \\ 3ax + 4a^2 < x^2 + 4ax + 4a^2 \end{cases}$;

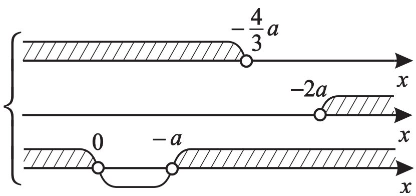
$\begin{cases} a\left(3x+4a\right) \geqslant 0 \\ x > -2a \\ x^2 + ax > 0 \end{cases}$.

а) При $a > 0$ $\begin{cases} x \geqslant -\dfrac{4}{3}a \\ x > -2a \\ x^2 + ax > 0 \end{cases}$,



значит при $a > 0$ $x \in \left[-\dfrac{4}{3}a; -a\right) \cup (0; \infty)$.

б) При $a < 0$ $\begin{cases} x < -\dfrac{4}{3}a \\ x > -2a \\ x\left(x+a\right) > 0 \end{cases}$,



т.е. при $a < 0$ $x \in \varnothing$;

в) При $a = 0$ $x > 0$.

Ответ: решением неравенства $\sqrt{3ax + 4a^2} < x + 2a$ является:

1) при $a > 0$ $x \in \left[-\dfrac{4}{3}a; -a\right) \cup (0; \infty)$;

2) при $a = 0$ $x \in \left(0; \infty\right)$;

3) при $a < 0$ $x \in \varnothing$.

Примечание. Задача может быть сформулирована иначе. При каких значениях параметра a решением неравенства является луч? При каких значениях параметра a решением неравенства является интервал с граничной точкой или при каких значениях параметра a неравенство решения не имеет?

Тренировочная работа 5

1. Найдите все значения параметра a,
при которых множеством всех решений неравенства $(x-a+4)\sqrt{x+3a-2}\leqslant 0$ является отрезок длины $|a|$.

2. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $\sqrt{3a^2-x^2}\geqslant |x+a|$ имеет единственное решение.

3. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $(x-a-4)\sqrt{x-4a}\leqslant 0$ имеет единственное решение.

4. Найдите все значения параметра a, при которых решением неравенства $(x+a+2)\sqrt{x-a-1}\leqslant 0$ является отрезок.

5. При каких значениях параметра a решением неравенства $\sqrt{4a^2-3ax}<x-2a$ является луч без граничной точки?

6. Найдите все значения параметра a, при которых любое значение $x\in(3;\,7)$ не является решением неравенства $\sqrt{13x^2-12ax}\geqslant 2x-a$.

7. При каких значениях параметра a неравенство $\sqrt{x-2a}+\sqrt{a-x}\geqslant 1$ имеет единственное решение?

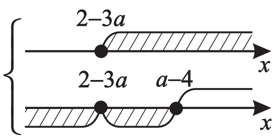
Решение тренировочной работы 5

1. Найдите все значения параметра a, при которых множеством всех решений неравенства
$(x-a+4)\sqrt{x+3a-2} \leqslant 0$ является отрезок длины $|a|$.

Неравенство $(x-a+4)\sqrt{x+3a-2} \leqslant 0$ равносильно
$$\begin{cases} x \geqslant 2-3a \\ (x-a+4)(x+3a-2)^2 \leqslant 0 \end{cases}.$$

а) Пусть $a-4 \geqslant 2-3a$;

значит $a \geqslant \frac{3}{2}$, тогда $2-3a \leqslant x \leqslant a-4$.

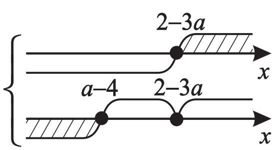


Так как $|a-4-(2-3a)| = |a|$, то $|4a-6| = |a|$,

значит $(4a-6-a)(4a-6+a) = 0$,

$$\left[\begin{array}{l} a = 2 > \frac{3}{2} \\ a = \frac{6}{5} < \frac{3}{2} \quad \text{– не подходит}. \end{array}\right.$$

б) $a-4 \leqslant 2-3a$;
тогда решение не будет отрезком.



Ответ: при $a=2$ множеством всех решений неравенства $(x-a+4)\sqrt{x+3a-2} \leqslant 0$ является отрезок длины $|a|$, т.е. $x \in [-4; -2]$.

2. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $\sqrt{3a^2 - x^2} \geqslant |x + a|$ имеет единственное решение.

Неравенство $\sqrt{3a^2 - x^2} \geqslant |x + a|$ равносильно

$3a^2 - x^2 \geqslant (x + a)^2$, т.е. $3a^2 - x^2 \geqslant x^2 + 2ax + a^2$,

значит $2x^2 + 2ax - 2a^2 \leqslant 0$; $x^2 + ax - a^2 \leqslant 0$.

Неравенство имеет единственное решение, если $D = 0$.

$D = a^2 + 4a^2 = 5a^2 = 0$ при $a = 0$ – $x = 0$.

Ответ: при $a = 0$ неравенство $\sqrt{3a^2 - x^2} \geqslant |x + a|$ имеет единственное решение $x = 0$.

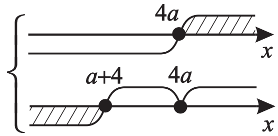
3. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $(x - a - 4)\sqrt{x - 4a} \leqslant 0$ имеет единственное решение.

Неравенство $(x - a - 4)\sqrt{x - 4a} \leqslant 0$ равносильно

$$\begin{cases} x \geqslant 4a \\ (x - a - 4)(x - 4a)^2 \leqslant 0 \end{cases}.$$

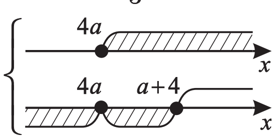
а) Пусть $a + 4 \leqslant 4a$, т.е. $a \geqslant \dfrac{4}{3}$, тогда система неравенств

приобретет следующий вид,



и получим только корень $x = 4a$.

б) При $a < \dfrac{4}{3}$ решение будет не единственным.



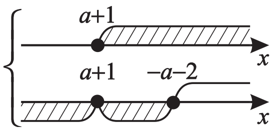
Ответ: при $a \geqslant \dfrac{4}{3}$ неравенство $(x - a - 4)\sqrt{x - 4a} \leqslant 0$ имеет единственное решение.

4. Найдите все значения параметра a, при которых решением неравенства $(x+a+2)\sqrt{x-a-1} \leqslant 0$ является отрезок.

Неравенство $(x+a+2)\sqrt{x-a-1} \leqslant 0$ равносильно

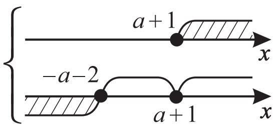
$$\begin{cases} x-a-1 \geqslant 0 \\ (x+a+2)(x-a-1)^2 \leqslant 0 \end{cases}.$$

а) $-a-2 \geqslant a+1$, т.е. $a \leqslant -1{,}5$. Тогда система неравенств примет следующий вид,



и получим $(a+1) \leqslant x \leqslant -(a+2)$.

б) При $a > -1{,}5$ решение есть точка $x = a+1$.



Ответ: при $a \leqslant -1{,}5$ решением неравенства $(x+a+2)\sqrt{x-a-1} \leqslant 0$ является отрезок $\left[a+1; -(a+2)\right]$.

5. При каких значениях параметра a решением неравенства $\sqrt{4a^2-3ax} < x-2a$ является луч без граничной точки?

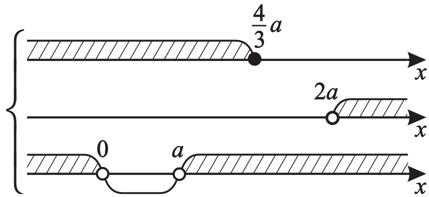
Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 4a^2-3ax \geqslant 0 \\ x > 2a \\ 4a^2-3ax < x^2-4ax+4a^2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a(4a-3x) \geqslant 0 \\ x > 2a \\ x^2-ax > 0 \end{cases}.$$

а) При $a > 0$

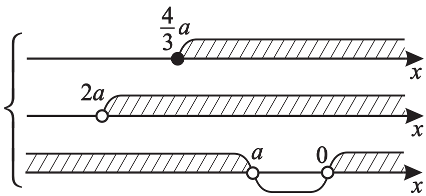
$$\begin{cases} x \leqslant \frac{4}{3}a \\ x > 2a \\ x(x-a) > 0 \end{cases},$$



т.е. при $a > 0$ $x \in \varnothing$.

б) При $a < 0$

$$\begin{cases} x \geqslant \frac{4}{3}a \\ x > 2a \\ x(x-a) > 0 \end{cases},$$



т.е. при $a < 0$; $x \in \left[\frac{4}{3}a; a\right) \cup (0; \infty)$.

в) При $a = 0$ $\sqrt{0} < x$, т.е. при $a = 0$ $x \in (0; \infty)$.

Ответ: при $a = 0$ решением неравенства $\sqrt{4a^2 - 3ax} < x - 2a$ является луч без граничной точки $x \in (0; \infty)$.

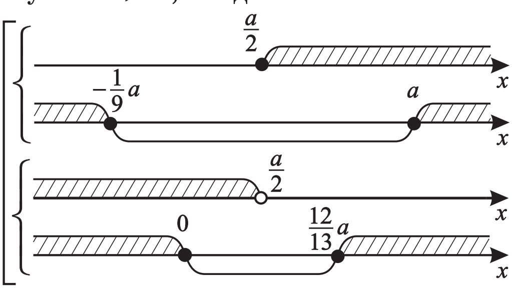
6. Найдите все значения параметра a, при которых любое значение $x \in (3; 7)$ не является решением неравенства $\sqrt{13x^2 - 12ax} \geqslant 2x - a$.

Данное неравенство равносильно системе

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - a \geqslant 0 \\ 13x^2 - 12ax \geqslant (2x-a)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - a < 0 \\ 13x^2 - 12ax \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant \frac{a}{2} \\ 13x^2 - 12ax \geqslant 4x^2 - 4ax + a^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \frac{a}{2} \\ x(13x - 12a) \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.;$$

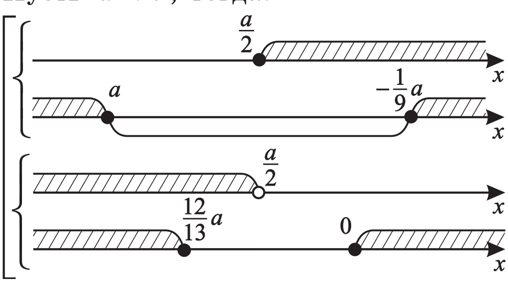
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geqslant \dfrac{a}{2} \\ 9x^2 - 8ax - a^2 \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{a}{2} \\ x\left(13x - 12a\right) \geqslant 0 \end{cases}\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geqslant \dfrac{a}{2} \\ \left(x - a\right)\left(9x + a\right) \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{a}{2} \\ x\left(13x - 12a\right) \geqslant 0 \end{cases}\end{array}\right..$$

1) Пусть $a \geqslant 0$, тогда:



$$\left[\begin{array}{l} x \geqslant a \\ x \leqslant 0 \end{array}\right., \text{ т.е. при } a \geqslant 0 \quad x \in \left(-\infty; 0\right] \cup \left[a; \infty\right).$$

2) Пусть $a < 0$, тогда:



$$\left[\begin{array}{l} x \geqslant -\dfrac{1}{9}a \\ x \leqslant \dfrac{12}{13}a \end{array}\right., \text{ т.е. при } a < 0 \quad x \in \left(-\infty; \dfrac{12}{13}a\right] \cup \left[-\dfrac{1}{9}a; \infty\right).$$

3) Так как любой $x \in \left(3; 7\right)$ не является решением, то

а) для $a \geqslant 0$ $\quad \begin{cases} a \geqslant 7 \\ 0 \leqslant 3 \end{cases}; \quad a \geqslant 7;$

б) для $a < 0$ $\begin{cases} -\dfrac{1}{9}a \geqslant 7 \\ \dfrac{12}{13}a \leqslant 3 \end{cases}$; $\begin{cases} a \leqslant -63 \\ a \leqslant 3\dfrac{1}{3} \end{cases}$; $a \leqslant -63$.

Ответ: при $a \in (-\infty; -63] \cup [7; \infty)$ любое значение $x \in (3; 7)$ не является решением неравенства $\sqrt{13x^2 - 12ax} \geqslant 2x - a$.

7. При каких значениях параметра a неравенство $\sqrt{x-2a} + \sqrt{a-x} \geqslant 1$ имеет единственное решение?

Неравенство равносильно

$$\begin{cases} x \geqslant 2a \\ x \leqslant a \\ x - 2a + 2\sqrt{(x-2a)(a-x)} + a - x \geqslant 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2a \leqslant x \leqslant a \\ 2\sqrt{(x-2a)(a-x)} \geqslant 1 + a \end{cases};$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geqslant -1 \\ 2a \leqslant x \leqslant a \\ 4(-x^2 + 3ax - 2a^2) \geqslant 1 + 2a + a^2 \end{cases}; \\ \begin{cases} a < -1 \\ 2a \leqslant x \leqslant a \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geqslant -1 \\ 2a \leqslant x \leqslant a \\ 4x^2 - 12ax + 9a^2 + 2a + 1 \leqslant 0 \end{cases}. \\ \begin{cases} a < -1 \\ 2a \leqslant x \leqslant a \end{cases} \end{array}\right.$$

Неравенство $4x^2 - 12ax + 9a^2 + 2a + 1 \leqslant 0$ имеет единственное решение при $D = 0$.

$D = 36a^2 - 36a^2 - 8a - 4 = 0$ при $a = -\dfrac{1}{2}$,

при этом $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$. Итак,

$$\begin{cases} a \geqslant -1 \\ a = -\dfrac{1}{2} \\ -1 \leqslant x \leqslant -\dfrac{1}{2} \\ x_0 = \dfrac{12a}{8} \end{cases}; \quad \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ -1 \leqslant x \leqslant -\dfrac{1}{2} \\ x_0 = \dfrac{3a}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ x_0 = -\dfrac{3}{4} \\ -1 \leqslant -\dfrac{3}{4} \leqslant -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Таким образом, при $a = -\dfrac{1}{2}$ существует единственное решение $x = -\dfrac{3}{4}$.

Ответ: при $a = -\dfrac{1}{2}$ неравенство $\sqrt{x - 2a} + \sqrt{a - x} \geqslant 1$ имеет единственное решение $x = -\dfrac{3}{4}$.

6

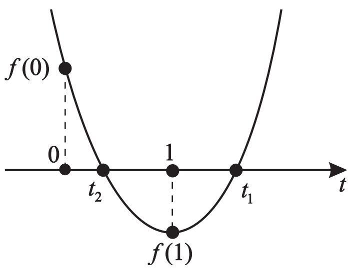
Тригонометрия[1]

Практикум 6

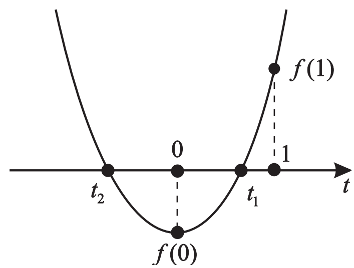
1. При каких значениях параметра a уравнение $\cos^4 2x - 2(a+2)\cos^2 2x - (2a+5) = 0$ имеет хотя бы одно решение?

Пусть $\cos^2 2x = t$, $t \in [0;1]$, тогда $f(t) = t^2 - 2(a+2)t - (2a+5)$. Условием существования хотя бы одного корня на $[0;1]$ является $f(1)\cdot f(0) \leqslant 0$.

а)

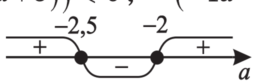


б)



$\left(1-2(a+2)\cdot 1-2a-5\right)\left(-(2a+5)\right) \leqslant 0$; $-(-4a-8)(2a+5) \leqslant 0$;

$4(a+2)(2a+5) \leqslant 0$.



Ответ: при $a \in [-2{,}5; -2]$ существует хотя бы один корень уравнения $\cos^4 2x - 2(a+2)\cos^2 2x - (2a+5) = 0$.

[1]Подробнее см. Шахмейстер А. Х. Тригонометрия. СПб.: «Петроглиф», 2009.

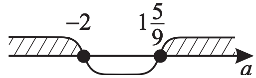
2. При каких значениях параметра a прямая $y = a$ имеет хотя бы одну общую точку с графиком функции

$y = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x + 7}{3\operatorname{tg} x + 1}$?

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x+7}{3\operatorname{tg} x+1} = a; \quad \operatorname{tg}^2 x - 3a \operatorname{tg} x + 7 - a = 0;$$

$$D = 9a^2 - 28 + 4a \geqslant 0; \quad 9a^2 + 4a - 28 = 0;$$

$$a_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+252}}{9} = \frac{-2 \pm 16}{9}; \quad \left[\begin{array}{l} a = -2 \\ a = \dfrac{14}{9} \end{array}\right. .$$



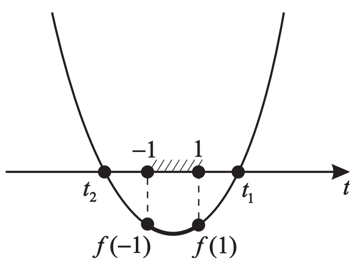
Проверим $\operatorname{tg} x = -\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{1}{9} + a + 7 - a = 0$; $7\dfrac{1}{9} = 0$ – ложно.

Ответ: при $a \in (-\infty; -2] \cup \left[1\dfrac{5}{9}; \infty\right)$ прямая $y = a$ имеет хотя бы одну общую точку с графиком функции $y = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x+7}{3\operatorname{tg} x+1}$.

3. При каких значениях параметра a уравнение $3\cos^2 x - (3a + 10)\cos x + 10a = 0$ не имеет корней?

Пусть $\cos x = t$ и $f(t) = 3t^2 - (3a + 10)t + 10a$.

1) Так как $\cos x \in [-1; 1]$, то при $[-1; 1] \subset (t_2; t_1)$, решения нет.



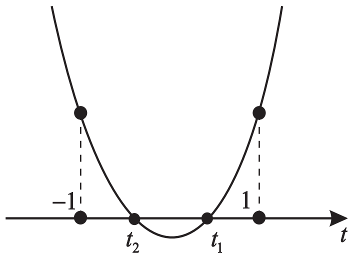
Но это возможно при $\begin{cases} f(1) < 0 \\ f(-1) < 0 \end{cases}$,

тогда $\begin{cases} 3 - (3a + 10) + 10a < 0 \\ 3 + (3a + 10) + 10a < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} a < 1 \\ a < -1 \end{cases}$ $(-\infty; -1)$.

2) $D=\left(3a+10\right)^2-120a=\left(3a-10\right)^2\geqslant 0$.

Значит в уравнении корни есть всегда, но возможны различные случаи.

а) $t\in\left[-1;\,1\right]$, учтём, что $D\geqslant 0$,

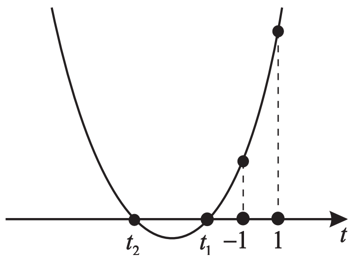


тогда $-1\leqslant-\dfrac{b}{2a}\leqslant 1$,

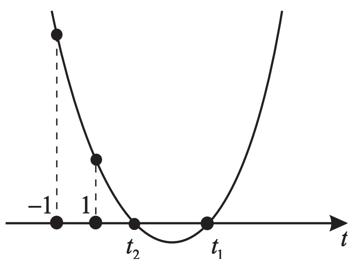
т.е. $-1\leqslant\dfrac{3a+10}{6}\leqslant 1$;

$a\in\left[-5\dfrac{1}{3};\,-1\dfrac{1}{3}\right]$.

б) $t\notin\left[-1;\,1\right]$. Пусть $t<-1$.



в) Пусть $t>1$.

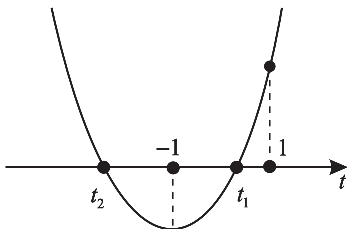


Во всех этих случаях $\begin{cases}f\left(1\right)>0\\ f\left(-1\right)>0\end{cases}$; $\begin{cases}a>1\\ a>-1\end{cases}$; $\left(1;\,\infty\right)$.

Учтём, что $\left[-5\dfrac{1}{3};\,-1\dfrac{1}{3}\right]\not\subset\left(1;\,\infty\right)$.

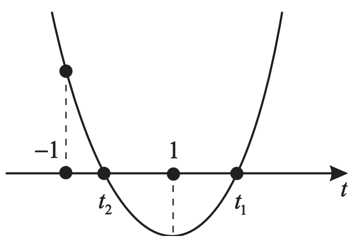
Примечание. Так как $\left[-5\dfrac{1}{3};\,-1\dfrac{1}{3}\right]\not\subset\left(1;\,\infty\right)$, то случай а) реализоваться не может.

3) Если $\begin{cases} f(1) > 0 \\ f(-1) < 0 \end{cases}$, т.е. при $\begin{cases} a > 1 \\ a < -1 \end{cases}$ $\varnothing$, при этих условиях мог бы существовать только один корень для t. В данном случае это невозможно.



4) Если $\begin{cases} f(1) < 0 \\ f(-1) > 0 \end{cases}$,

т.е. $\begin{cases} a < 1 \\ a > -1 \end{cases}$, существует только один корень для t, таким образом $a \in (-1; 1)$.



Ответ: при $a \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ уравнение $3\cos^2 x - (3a+10)\cos x + 10a = 0$ не имеет корней.

Примечание. Можно проще, так как уравнение легко разложить на множители.

$$3\cos^2 x - (3a+10)\cos x + 10a = (3\cos x - 10)(\cos x - a),$$

но $\cos x = \dfrac{10}{3} \notin [-1; 1]$, значит только $\cos x = a$ и т.д.

4. При каких значениях параметра a уравнение $-2\sin^2 x = \left(a^2 + 5a + 2\right)\sin x$ имеет только четыре корня на отрезке $\left[0; 2\pi\right]$?

Уравнение примет вид $2t^2 + \left(a^2 + 5a + 2\right) t = 0$,

где $t = \sin x$;

$$\left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -\frac{a^2+5a+2}{2} \end{array}\right. \quad \left(D > 0\right).$$

а) Пусть $t_1 = 0$, тогда $\sin x = 0$;

$\exists$ три решения на отрезке $\left[0; 2\pi\right]$ – $x = 0$; $x = \pi$; $x = 2\pi$, так как $\sin x \in \left[-1; 1\right]$.

Учтем, что для $t_1 = 0$ есть три корня,

а для $t_2 = -\frac{a^2+5a+2}{2}$ в данном случае нужен только один.

В итоге получим четыре корня, но это возможно, если $t_2 = 1$ или $t_2 = -1$.

б) Пусть $t_2 = -\frac{a^2+5a+2}{2} = 1$; тогда $\left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = -4 \end{array}\right.$, т.е. $\sin x = 1$;

$x = \frac{\pi}{2}$ – только один корень на $\left[0; 2\pi\right]$.

в) Пусть $t_2 = -\frac{a^2+5a+2}{2} = -1$; $\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = -5 \end{array}\right.$, т.е. $\sin x = -1$;

$x = 1{,}5\pi$ – только один корень на $\left[0; 2\pi\right]$.

Ответ: при $a \in \left\{-5; -4; -1; 0\right\}$ существуют только четыре корня уравнения $-2\sin^2 x = \left(a^2 + 5a + 2\right)\sin x$ на $\left[0; 2\pi\right]$.

5. Найдите все значения параметра a, при которых имеет решение неравенство $4\sin^2(3x+8) \geqslant 49a^2+84a+40$.

Так как $\sin^2(3x+8) \in [0;1]$, то $0 \leqslant \frac{49a^2+84a+40}{4} \leqslant 1$,

т.е. $\begin{cases} 49a^2+84a+40 \geqslant 0 \\ 49a^2+84a+36 \leqslant 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} (7a-6)^2+4 \geqslant 0 \\ (7a-6)^2 \leqslant 0 \end{cases}$ только при $a = \frac{6}{7}$.

Ответ: неравенство $4\sin^2(3x+8) \geqslant 49a^2+84a+40$ имеет решение только при $a = \frac{6}{7}$.

6. Решите уравнение $\sqrt{7\cos(6x+7)+32} = -20+10a-a^2$, выяснив, при каких значениях параметра a это возможно.

Уравнение равносильно

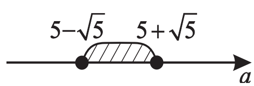
$$\begin{cases} -20+10a-a^2 \geqslant 0 \\ 7\cos(6x+7)+32 = \left(a^2-10a+20\right)^2 \end{cases}.$$

Но $\cos(6x+7) \in [-1;1]$, и так как

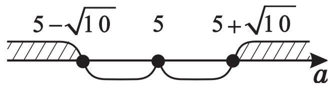
$\cos(6x+7) = \frac{\left(a^2-10a+20\right)^2-32}{7}$,

тогда $-1 \leqslant \frac{\left(a^2-10a+20\right)^2-32}{7} \leqslant 1$,

т.е. $\begin{cases} \left(a^2-10a+20\right)^2 \leqslant 39 \\ \left(a^2-10a+20\right)^2 \geqslant 25 \end{cases}$.

Но $-20+10a-a^2 \geqslant 0$, значит 

$\left(a^2 - 10a + 20\right)^2 - 25 \geqslant 0$;



$\left(a^2 - 10a + 15\right)\left(a - 5\right)^2 \geqslant 0$.

Тогда проверять нужно только $a = 5$,

так как только $5 \in \left[5 - \sqrt{5}; 5 + \sqrt{5}\right]$.

Итак, $\left(5^2 - 10 \cdot 5 + 20\right)^2 \leqslant 39$;

$25 \leqslant 39$ – истина.

Тогда $\cos\left(6x + 7\right) = \dfrac{\left(5^2 - 10 \cdot 5 + 20\right)^2 - 32}{7}$,

т.е. $\cos\left(6x + 7\right) = -1$; $6x + 7 = \pi + 2\pi k$;

$x = \dfrac{\pi - 7 + 2\pi k}{6}$; $\quad x = \dfrac{-7 + \pi\left(1 + 2k\right)}{6}$.

Ответ: только при $a = 5$ уравнение

$\sqrt{7\cos\left(6x + 7\right) + 32} = -20 + 10a - a^2$ имеет корни

$x \in \left\{\dfrac{-7 + \pi\left(1 + 2k\right)}{6} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

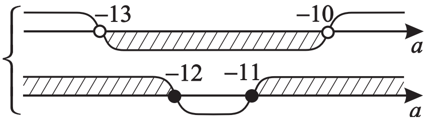
Примечание. Для того чтобы решить уравнение, необходимо было исследовать его как уравнение с параметром.

7. Найдите все значения параметра a, при которых число $x = \dfrac{5\pi}{8}$ не является корнем уравнения

$\left(x - \dfrac{5\pi}{8}\right)\left(x - 10\pi\right)\sqrt{a^2 + 23a + 131 + \cos\dfrac{8x}{5}} = 0$, а число $x = 10\pi$ является корнем этого уравнения.

Это значит $\begin{cases} a^2 + 23a + 131 + \cos\left(\dfrac{8}{5} \cdot \dfrac{5}{8}\pi\right) < 0 \\ a^2 + 23a + 131 + \cos\left(\dfrac{8}{5} \cdot 10\pi\right) \geqslant 0 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} a^2+23a+130<0 \\ a^2+23a+132 \geqslant 0 \end{cases}$;

$$\begin{cases} (a+10)(a+13)<0 \\ (a+11)(a+12) \geqslant 0 \end{cases}.$$



$a \in (-13;-12] \cup [-11;-10)$.

Ответ: при $a \in (-13;-12] \cup [-11;-10)$ число $x=\dfrac{5\pi}{8}$ не является корнем уравнения

$$\left(x-\frac{5\pi}{8}\right)(x-10\pi)\sqrt{a^2+23a+131+\cos\frac{8x}{5}}=0,$$

а число $x=10\pi$ является корнем этого уравнения.

8. Найдите все значения параметра a, при которых число $x=\dfrac{5\pi}{4}$ не является решением неравенства

$$(4x-5\pi)\sqrt{a^2\cos\frac{8x}{5}+12a+20} \leqslant 0.$$

По условию, чтобы не было корней,

$a^2\cos\dfrac{8x}{5}+12a+20<0$ при $x=\dfrac{5\pi}{4}$,

т.е. $a^2\cos\left(\dfrac{8}{5}\cdot\dfrac{5}{4}\pi\right)+12a+20<0$.

Значит $a^2+12a+20<0$; тогда $(a+2)(a+10)<0$.

Ответ: при $a \in (-10;-2)$ число $x=\dfrac{5\pi}{4}$ не является решением неравенства

$$(4x-5\pi)\sqrt{a^2\cos\frac{8x}{5}+12a+20} \leqslant 0.$$

9. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\cos 24x + 2(8+5a)\sin 12x - 110a + 65 = 0$ имеет хотя бы одно решение.

Приведем уравнение к уравнению относительно одного аргумента и одной функции.

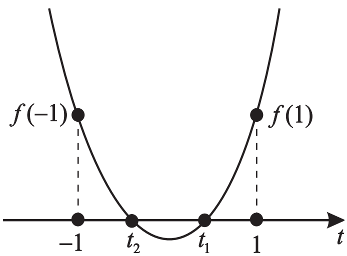
Так как $\cos 24x = 1 - 2\sin^2 12x$,

то $1 - 2\sin^2 12x + 2(8+5a)\sin 12x - 110a + 65 = 0$.

а) Пусть $\sin 12x = t$, тогда уравнение имеет вид

$2t^2 - 2(8+5a)t + 110a - 66 = 0$.

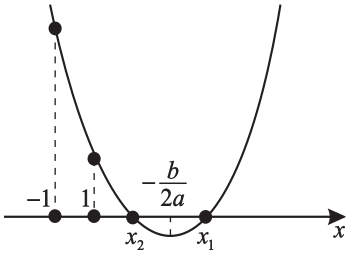
Но $|t| \leqslant 1$, значит

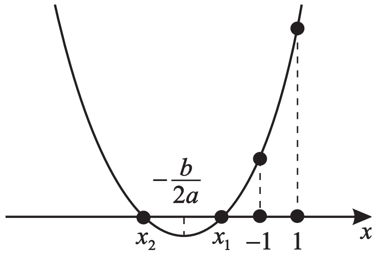


$$\begin{cases} f(-1) \geqslant 0 \\ f(1) \geqslant 0 \\ D \geqslant 0 \\ -1 \leqslant -\dfrac{b}{2a} \leqslant 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2 + 2(8+5a) + 110a - 66 \geqslant 0 \\ 2 - 2(8+5a) + 110a - 66 \geqslant 0 \\ (8+5a)^2 - 2(110a - 66) \geqslant 0 \\ -1 \leqslant \dfrac{8+5a}{2} \leqslant 1 \end{cases};$$

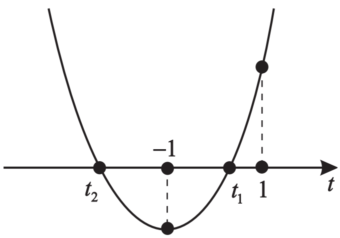
$$\begin{cases} 120a \geqslant 48 \\ 100a \geqslant 80 \\ 25a^2 - 140a + 196 \geqslant 0 \\ -1 \leqslant \dfrac{8+5a}{2} \leqslant 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} a \geqslant 0{,}4 \\ a \geqslant 0{,}8 \\ (5a-14)^2 \geqslant 0 \\ -2 \leqslant a \leqslant -\dfrac{6}{5} \end{cases} \quad \varnothing.$$

Примечание. Условие $-\frac{b}{2a} \in [-1; 1]$ необходимо, чтобы не было случаев, изображённых ниже.

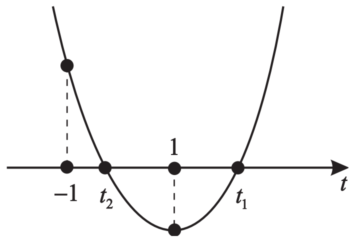




б) Но возможно, что есть только одно решение относительно t.



или



Тогда $f(-1) \cdot f(1) \leqslant 0$, значит $(a-0{,}4)(a-0{,}8) \leqslant 0$, т.е. $a \in [0{,}4; 0{,}8]$.

Ответ: При $a \in [0{,}4; 0{,}8]$

уравнение $\cos 24x + 2(8+5a)\sin 12x - 110a + 65 = 0$ имеет хотя бы одно решение.

10. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} 24\cos^2 x + 11\cos^2 y = 10a - 17 \\ 33\cos^2 x + 8\cos^2 y = 28a - 59 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

а) Выразим $\cos^2 y$ через параметр a, для этого

$$\begin{cases} 24\cos^2 x + 11\cos^2 y = 10a - 17 \\ 33\cos^2 x + 8\cos^2 y = 28a - 59 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot 11 \\ \cdot 8 \end{array} \right. .$$

$$\begin{cases} 264\cos^2 x + 121\cos^2 y = 110a - 187 \\ 264\cos^2 x + 64\cos^2 y = 224a - 472 \end{cases} \quad \boxed{1} - \boxed{2};$$

$$57\cos^2 y = -114a + 285;$$

$$\cos^2 y = \frac{-114a+285}{57}.$$

б) Чтобы выразить $\cos^2 x$ через параметр a,

$$\begin{cases} 24\cos^2 x + 11\cos^2 y = 10a - 17 \\ 33\cos^2 x + 8\cos^2 y = 28a - 59 \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot 8 \\ \cdot 11 \end{matrix} \right.;$$

$$\begin{cases} 192\cos^2 x + 88\cos^2 y = 80a - 136 \\ 363\cos^2 x + 88\cos^2 y = 308a - 649 \end{cases} \quad \boxed{1} - \boxed{2};$$

$$-171\cos^2 x = -228a + 513;$$

$$\cos^2 x = \frac{228a-513}{171}.$$

в) Но $\begin{cases} \cos^2 x \in [0;1] \\ \cos^2 y \in [0;1] \end{cases}$, тогда $\begin{cases} 0 \leqslant \dfrac{-114a+285}{57} \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \dfrac{228a-513}{171} \leqslant 1 \end{cases}$;

$$\begin{cases} a \geqslant \dfrac{228}{114} = 2 \\ a \leqslant \dfrac{285}{114} = 2\dfrac{57}{114} = 2{,}5 \\ a \geqslant \dfrac{513}{228} = 2{,}25 \\ a \leqslant \dfrac{684}{228} = 3 \end{cases}; \qquad a \in [2{,}25;\, 2{,}5].$$

Ответ: при $a \in [2{,}25;\, 2{,}5]$ система уравнений

$$\begin{cases} 24\cos^2 x + 11\cos^2 y = 10a - 17 \\ 33\cos^2 x + 8\cos^2 y = 28a - 59 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

11. $\frac{3}{4}\sin 2x+\frac{5}{4}\cos 2x>a$ для $\forall x$. При каких значениях параметра a это возможно?

а) Пусть $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$.

Учитывая условие $\frac{3}{4}\cdot 0+\frac{5}{4}\cdot(-1)>a$, получим $a<-\frac{5}{4}$.

б) Пусть $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$. Так как $\sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$; $\cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$,

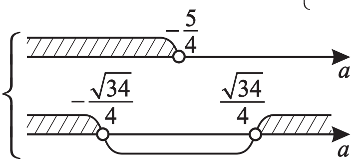
полагаем $\operatorname{tg} x=t$, тогда $\frac{3}{4}\cdot\frac{2t}{1+t^2}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}>a$;

$6t+5-5t^2>4a+4at^2$;

$(4a+5)\,t^2-6t+4a-5<0$, что возможно при любых

значениях t, если $\begin{cases}4a+5<0\\ D=9-(4a+5)(4a-5)<0\end{cases}$;

$\begin{cases}a<-\frac{5}{4}\\ 9-16a^2+25<0\end{cases}$; $\begin{cases}a<-\frac{5}{4}\\ a^2>\frac{34}{16}\end{cases}$.



$a<-\frac{\sqrt{34}}{4}$

Требование $a<-\frac{5}{4}$ подходит не для всех x, а условие

$a<\frac{\sqrt{34}}{4}$ – для любых x.

Ответ: $\frac{3}{4}\sin 2x+\frac{5}{4}\cos 2x>a$ для $\forall x$ при $a<-\frac{\sqrt{34}}{4}$.

Примечание. Можно иначе, если знать, что

$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\varphi_0)$, где $\varphi_0=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$

и $a\sin x+b\cos x\in\left[-\sqrt{a^2+b^2};\sqrt{a^2+b^2}\right]$.

12. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{2}{1+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=a$ решения не имеет?

$$\frac{2}{a}=1+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\ \text{ при }\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\neq-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

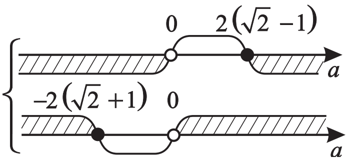
$$\frac{2-a}{a}=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right);$$

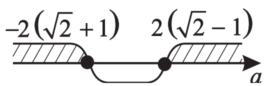
$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2-a}{\sqrt{2}a}\quad\left(\frac{2-a}{\sqrt{2}a}\neq-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ \text{ для }\ \forall a.$$

Чтобы уравнение имело решение, необходимо

$$\begin{cases}\dfrac{2-a}{\sqrt{2}a}\leqslant 1\\[2mm] \dfrac{2-a}{\sqrt{2}a}\geqslant -1\end{cases};\quad \begin{cases}\dfrac{2-\left(1+\sqrt{2}\right)a}{\sqrt{2}a}\leqslant 0\\[2mm] \dfrac{2-\left(1-\sqrt{2}\right)a}{\sqrt{2}a}\geqslant 0\end{cases};$$

$$\begin{cases}\dfrac{2-\left(1+\sqrt{2}\right)a}{\sqrt{2}a}\leqslant 0 & \left(\dfrac{2}{1+\sqrt{2}}=2\left(\sqrt{2}-1\right)\right)\\[2mm] \dfrac{-\left(1-\sqrt{2}\right)a+2}{\sqrt{2}a}\geqslant 0 & \left(\dfrac{2}{1-\sqrt{2}}=-2\left(\sqrt{2}+1\right)\right),\quad \left(1-\sqrt{2}<0\right).\end{cases}$$



,


Таким образом, при $a\in\left(-2\left(\sqrt{2}+1\right);0\right)\cup\left(0;2\left(\sqrt{2}-1\right)\right)$

уравнение решений не имеет (при $a=0$
корней тоже нет).

Ответ: при $a\in\left(-2\left(\sqrt{2}+1\right);2\left(\sqrt{2}-1\right)\right)$ уравнение

$$\frac{2}{1+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=a\ \text{ решения не имеет.}$$

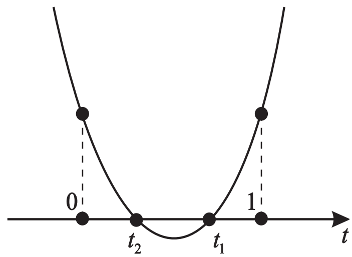
13. При каких значениях параметра a уравнение $\sin^2 x - |\sin x| + a = 0$ имеет четыре корня на $[0; 2\pi]$?

Пусть $|\sin x| = t$ $(t > 0)$, тогда $\sin^2 x = |\sin x|^2 = t^2$, тогда $t^2 - t + a = 0$; $t_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2}$ (ось симметрии $t = \dfrac{1}{2}$).

$D = 1 - 4a > 0$, чтобы было два корня.

Так как $t > 0$, то $a > 0$, но $0 < t < 1$, тогда чтобы это выполнялось

$$\begin{cases} f(0) > 0 \\ f(1) > 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} a > 0 \\ a > 0 \end{cases},$$



т.е. при $a \in \left(0; \dfrac{1}{4}\right)$ $\exists$ два корня $t \in (0; 1)$.

$$\left[\begin{aligned} |\sin x| &= \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2} \\ |\sin x| &= \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2} \end{aligned}\right., \text{ значит } 0 < |\sin x| < 1.$$

Итак, тогда есть четыре корня на $[0; 2\pi]$.

Ответ: при $a \in \left(0; \dfrac{1}{4}\right)$ уравнение $\sin^2 x - |\sin x| + a = 0$ имеет четыре корня на $[0; 2\pi]$.

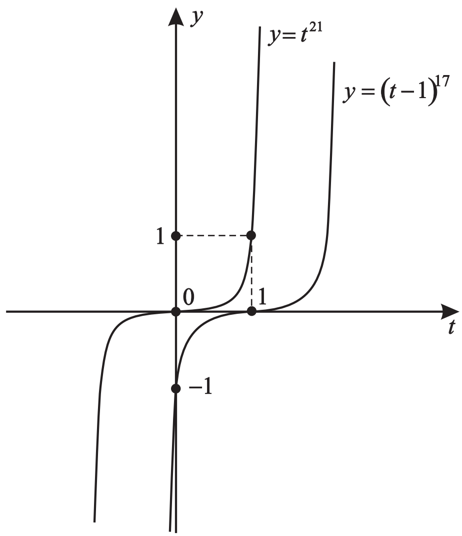
14. Найдите наибольшее значение a, при котором уравнение $\cos^{42} x + \sin^{34} x = a$ имеет решение.

$$\left(\cos^2 x\right)^{21} + \left(\sin^2 x\right)^{17} = a.$$

Пусть $\cos^2 x = t$; $t = \cos^2 x \in [0; 1]$;

$t^{21}+(1-t)^{17}=a$, тогда $t^{21}-(t-1)^{17}=a$.

Иллюстрируем графически.



Благодаря различной выпуклости на $[0;1]$ наибольшая разность между значениями функций $y=t^{21}$ и $y=(t-1)^{17}$ при $t=0$ и $t=1$ равна единице, т.е. $a=1$.

Ответ: наибольшее значение параметра a, при котором уравнение $\cos^{42}x+\sin^{34}x=a$ имеет решение, $a=1$.

Примечание. Уравнение $\cos^{42}x+\sin^{34}x=a$ имеет более простое решение.

Так как $+\begin{array}{ll} \cos^{42}x\leqslant\cos^{2}x; & 0\leqslant\cos^{2}x\leqslant 1 \\ \sin^{34}x\leqslant\sin^{2}x; & 0\leqslant\sin^{2}x\leqslant 1 \end{array}$,

и $a=\cos^{42}x+\sin^{34}x\leqslant\cos^{2}x+\sin^{2}x=1$,

т.е. $a\leqslant 1$, то $a=1$ – наибольшее значение, при котором уравнение имеет решение.

15. При каких значениях параметра a уравнение

$\arcsin x + \arccos(a - 2x) = \dfrac{\pi}{2}$ имеет решение?

Известно тождество $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, значит

$\arccos(a - 2x) = \arccos x$, и тогда $x = a - 2x$; $x = \dfrac{a}{3}$.

Уравнение имеет решение при $|x| \leqslant 1$ – условие

существования $\arccos x$ и $\arcsin x$, тогда $\left|\dfrac{a}{3}\right| \leqslant 1$.

Значит $\begin{cases} \dfrac{a}{3} \leqslant 1 \\ \dfrac{a}{3} \geqslant -1 \end{cases}$, т.е. $a \in [-3; 3]$.

Ответ: при $a \in [-3; 3]$ уравнение

$$\arcsin x + \arccos(a - 2x) = \frac{\pi}{2} \text{ имеет решение.}$$

Примечание. Можно решать иначе: из уравнения следует,

что $\arccos(a - 2x) = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$,

тогда $\cos(\arccos(a - 2x)) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin x\right)$.

Значит $a - 2x = \sin(\arcsin x)$; $a - 2x = x$; $x = \dfrac{a}{3}$.

16. При каких значениях параметра a уравнение

$\dfrac{12}{\pi} \arcsin\left(\dfrac{3}{4\sqrt{2}}(\sin x + \cos x) - 0{,}25\right) = a$ имеет решение?

Так как $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$,

то $\dfrac{3}{4\sqrt{2}}(\sin x + \cos x) = \dfrac{3}{4\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3}{4} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$,

тогда $\dfrac{3}{4\sqrt{2}}(\sin x + \cos x) - 0{,}25 = \dfrac{3\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1}{4}$.

Для того чтобы $\arcsin\left(\frac{3}{4\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)-0{,}25\right)$ существовал, необходимо, чтобы

$$-1 \leqslant \frac{3\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1}{4} \leqslant 1\,.$$

Значит $-1 \leqslant \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{5}{3}$, что верно для любых x,

но $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \in [-1;1]$.

Пусть $t=\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}$,

$t_{\text{наим}}=\frac{3}{4}\cdot(-1)-\frac{1}{4}=-1$ и $t_{\text{наиб}}=\frac{3}{4}\cdot 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Тогда в силу непрерывности функция $y=\arcsin x$ пробегает все значения на $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Значит, учтя, что

$y=\arcsin x\ \uparrow$ и $\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$, а $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$,

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin\left(\frac{3}{4\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)-0{,}25\right) \leqslant \frac{\pi}{6}\,.$$

Умножим все части двойного неравенства на $\frac{12}{\pi}$.

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin\left(\frac{3}{4\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)-0{,}25\right) \leqslant \frac{\pi}{6} \qquad \cdot\frac{12}{\pi}\,.$$

$$-6 \leqslant \frac{12}{\pi}\arcsin\left(\frac{3}{4\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)-0{,}25\right) \leqslant 2\,.$$

Ответ: уравнение $\frac{12}{\pi}\arcsin\left(\frac{3}{4\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)-0{,}25\right)=a$

имеет решение при $a \in [-6;2]$.

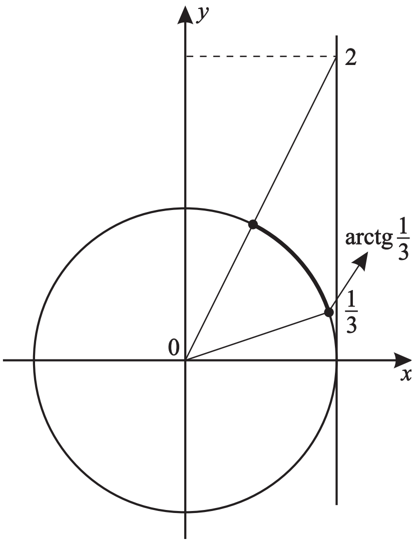
Примечание. Задача может быть сформулирована иначе. Например, найти $E(y)$,

где $y=\frac{12}{\pi}\arcsin\left(\frac{3}{4\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)-0{,}25\right)$. $\left(E(y)=[-6;2]\right)$.

17. При каких значениях параметра a уравнение $\sin 2x = a$ имеет решение для любых $x \in \left[\operatorname{arctg}\frac{1}{3}; \operatorname{arctg} 2\right]$?

$\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{3}; \operatorname{arctg} 2\right] \subset \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Рассмотрим это на тригонометрическом круге.



Очевидно, $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} < \frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 2$,

тогда $2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} < \frac{\pi}{2} < 2\operatorname{arctg} 2$.

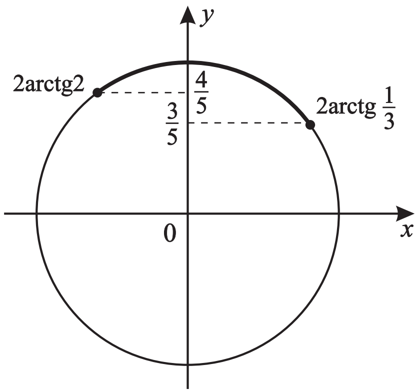
Значит

а) $\sin 2\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) = \dfrac{2\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)} = \dfrac{2\cdot\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{9}} = \dfrac{3}{5}$,

так как $\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ при $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$;

б) $\sin 2(\operatorname{arctg} 2) = \dfrac{2\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2)}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} 2)} = \dfrac{4}{5}$.

На тригонометрическом круге это выглядит так.



Итак, в силу непрерывности функции $y = \sin 2x$ при $\frac{3}{5} \leqslant a \leqslant 1$ уравнение $\sin 2x = a$ имеет решение на $\left[\operatorname{arctg} \frac{1}{3}; \operatorname{arctg} 2\right]$.

Ответ: при $a \in [0{,}6; 1]$ уравнение $\sin 2x = a$ имеет решение для любых $x \in \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{3}; \operatorname{arctg} 2\right]$.

Примечание. Идея задачи может быть сформулирована иначе.

Например:

1) Для функции $y = \sin 2x$ найти $E(y)$, если $D(y) = \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{3}; \operatorname{arctg} 2\right]$.

2) При каких значениях параметра a уравнение $\sin 2x = a$ имеет

а) два корня на $\left[\operatorname{arctg} \frac{1}{3}; \operatorname{arctg} 2\right]$ $(1 > a \geqslant 0{,}8)$;

б) единственное решение на $\left[\operatorname{arctg} \frac{1}{3}; \operatorname{arctg} 2\right]$ $(0{,}6 \leqslant a < 0{,}8; \quad a = 1)$?

18. При каких значениях параметра a уравнение
$\frac{1}{32}\cos 6x+\frac{3}{16}\cos 4x+\frac{15}{32}\cos 2x+\frac{5}{16}=\frac{a^2-8}{64}$ имеет решение?

$$\frac{1}{32}\cos 6x+\frac{3}{16}\cos 4x+\frac{15}{32}\cos 2x+\frac{5}{16}=\frac{a^2-8}{64} \quad \Big| \cdot 64;$$

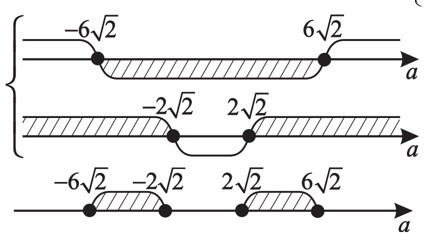
$2\cos 6x+12\cos 4x+30\cos 2x+20=a^2-8$, тогда
$2\cos 6x+12\cos 4x+30\cos 2x=a^2-28$.

Выразим левую часть уравнения вначале через $\cos 2x$:
$$2\left(4\cos^3 2x-3\cos 2x\right)+12\left(2\cos^2 2x-1\right)+30\cos 2x=a^2-28;$$
$$8\cos^3 2x+24\cos^2 2x+24\cos 2x=a^2-16.$$

А теперь выразим левую часть уравнения через $\cos x$:
$$8\left(2\cos^2 x-1\right)^3+24\left(2\cos^2 x-1\right)^2+24\left(2\cos^2 x-1\right)=a^2-16;$$
$$8\left(8\cos^6 x-12\cos^4 x+6\cos^2 x-1\right)+24\left(4\cos^4 x-4\cos^2 x+1\right)+$$
$$+24\left(2\cos^2 x-1\right)=a^2-16; \qquad 64\cos^6 x=a^2-8;$$

$\cos^6 x=\frac{a^2-8}{64}$, но $\cos^6 x\in[0;1]$. Значит $\begin{cases}\frac{a^2-8}{64}\leqslant 1\\ \frac{a^2-8}{64}\geqslant 0\end{cases}$;

$\begin{cases}a^2\leqslant 72\\ a^2\geqslant 8\end{cases}$.



Ответ: при $a\in\left[-6\sqrt{2};-2\sqrt{2}\right]\cup\left[2\sqrt{2};6\sqrt{2}\right]$ уравнение
$$\frac{1}{32}\cos 6x+\frac{3}{16}\cos 4x+\frac{15}{32}\cos 2x+\frac{5}{16}=\frac{a^2-8}{64}$$
имеет решение.

19. При каких значениях параметра a уравнение

$\left(2\sqrt{a}+1\right)\cos x+\left(\sqrt{a}-2\right)\sin x=\sqrt{10a}$ имеет решение?

Рассмотрим нормирующий множитель для приведения уравнения к виду $m\cos x+n\sin x=c$, где нормирующий множитель равен

$$\sqrt{\left(2\sqrt{a}+1\right)^2+\left(\sqrt{a}-2\right)^2}=\sqrt{4a+\underline{4\sqrt{a}}+1+a-\underline{4\sqrt{a}}+4}=$$

$$=\sqrt{5\left(a+1\right)}.$$

1) Докажем, что $\dfrac{2\sqrt{a}+1}{\sqrt{5(a+1)}}\leqslant 1$. $2\sqrt{a}+1\leqslant\sqrt{5\left(a+1\right)}$ $\left(a\geqslant 0\right)$;

$4a+4\sqrt{a}+1\leqslant 5a+5$; $4\sqrt{a}\leqslant a+4$; $16a\leqslant a^2+8a+16$;

$\left(a-4\right)^2\geqslant 0$ – верно, значит тогда пусть $\dfrac{2\sqrt{a}+1}{\sqrt{5(a+1)}}=\cos\varphi$.

2) Аналогично можно доказать, что $-1\leqslant\dfrac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{5(a+1)}}\leqslant 1$.

Значит $-\sqrt{5\left(a+1\right)}\leqslant\sqrt{a}-2\leqslant\sqrt{5\left(a+1\right)}$.

а) $\sqrt{a}-2\leqslant\sqrt{5a\left(a+1\right)}$ (при $a\geqslant 0$);

$\sqrt{a}\leqslant\sqrt{5\left(a+1\right)}+2$; $a\leqslant 5a+5+4\sqrt{5\left(a+1\right)}+4$;

$0\leqslant 4a+4\sqrt{5\left(a+1\right)}+9$ при любых $a\geqslant 0$;

б) $\sqrt{a}-2\geqslant-\sqrt{5\left(a+1\right)}$; $\sqrt{5\left(a+1\right)}\geqslant 2-\sqrt{a}$;

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2\geqslant\sqrt{a}\\5a+5\geqslant 4-4\sqrt{a}+4\end{cases}\\\begin{cases}2<\sqrt{a}\\\forall a\in\left[0;\infty\right)\end{cases}\end{array}\right.;\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0\leqslant a\leqslant 4\\4\sqrt{a}>-1-4a\end{cases}\\\begin{cases}a>4\\\forall a\in\left[0;\infty\right)\end{cases}\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}0\leqslant a\leqslant 4\\a>4\end{array}\right.\text{ при любых } a\geqslant 0.$$

Тогда $\dfrac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{5(a+1)}} = \sin\varphi$.

Докажем, что это так. Для этого достаточно доказать, что $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$.

$$\left(\frac{2\sqrt{a}+1}{\sqrt{5(a+1)}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{5(a+1)}}\right)^2 = \frac{4a+4\sqrt{a}+1+a-4\sqrt{a}+4}{5(a+1)} = \frac{5a+5}{5(a+1)} = 1.$$

Учитывая предыдущие соображения, уравнение можно представить в виде

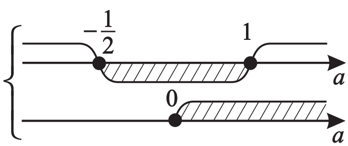
$$\sqrt{5\,(a+1)}\left(\frac{2\sqrt{a}+1}{\sqrt{5(a+1)}}\cos x + \frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{5(a+1)}}\sin x\right) = \sqrt{10a}.$$

Далее $\cos\varphi\cdot\cos x + \sin\varphi\cdot\sin x = \dfrac{\sqrt{10a}}{\sqrt{5(a+1)}}$;

$$\cos(x-\varphi) = \frac{\sqrt{10a}}{\sqrt{5(a+1)}} = \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{a+1}}.$$

Значит (при $a \geqslant 0$) $-1 \leqslant \dfrac{\sqrt{2a}}{\sqrt{a+1}} \leqslant 1$, $\sqrt{2a} \leqslant \sqrt{a+1}$,

тогда $2a^2 \leqslant a+1$ $(a \geqslant 0)$



$a \in [0; 1]$

Ответ: уравнение $\left(2\sqrt{a}+1\right)\cos x + \left(\sqrt{a}-2\right)\sin x = \sqrt{10a}$ имеет решение при $a \in [0; 1]$.

20. Найдите все значения параметра b, при которых уравнение

$$\left(b^2 - 14b + 48\right)\left(\sin 4x\cdot\cos\frac{\pi}{7} + \cos 4x\cdot\sin\frac{\pi}{7}\right) = 3b^2 - 30b + 48$$

имеет решение.

Преобразуя уравнение, получим

$$(b-6)\,(b-8)\sin\left(4x+\frac{\pi}{7}\right) = 3\,(b-2)\,(b-8);$$

$$(b-8)\left((b-6)\sin\left(4x+\frac{\pi}{7}\right) - 3\,(b-2)\right) = 0.$$

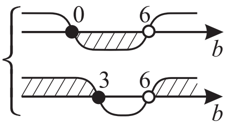
а) $b = 8$, тогда любое x − решение;

б) $b = 6$, тогда $x \in \varnothing$.

в) $\begin{cases} b \neq 6 \\ b \neq 8 \end{cases}$, тогда $\sin\left(4x + \frac{\pi}{7}\right) = \frac{3(b-2)}{b-6}$.

Для существования решения необходимо, чтобы

$$\begin{cases} \frac{3(b-2)}{b-6} \leqslant 1 \\ \frac{3(b-2)}{b-6} \geqslant -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{2b}{b-6} \leqslant 0 \\ \frac{4(b-3)}{b-6} \geqslant 0 \end{cases};$$



$[0; 3]$.

Ответ: уравнение

$$\left(b^2 - 14b + 48\right)\left(\sin 4x \cdot \cos\frac{\pi}{7} + \cos 4x \cdot \sin\frac{\pi}{7}\right) = 3b^2 - 30b + 48$$

имеет решение при $b \in [0; 3] \cup \{8\}$.

21. Найдите все значения параметра b, при которых график функции $f(x) = 3\operatorname{tg}\frac{bx}{15} + 2\sin\frac{8\pi b - 3x}{4}$ центрально-симметричен относительно начала координат.

Условие центральной симметрии графика функции относительно начала координат означает, что функция обладает свойством нечетности, т.е. $f(-x) = -f(x)$, значит

$$3\operatorname{tg}\frac{b(-x)}{15} + 2\sin\frac{8\pi b - 3(-x)}{4} = -3\operatorname{tg}\frac{bx}{15} - 2\sin\frac{8\pi b - 3x}{4}, \text{ тогда}$$

$$-3\operatorname{tg}\frac{bx}{15} + 2\sin\frac{8\pi b + 3x}{4} = -3\operatorname{tg}\frac{bx}{15} - 2\sin\frac{8\pi b - 3x}{4};$$

$$2\left(\sin\frac{8\pi b + 3x}{4} + \sin\frac{8\pi b - 3x}{4}\right) = 0;$$

$$\sin\frac{8\pi b + 3x + 8\pi b - 3x}{8} \cdot \cos\frac{8\pi b + 3x - 8\pi b + 3x}{8} = 0; \quad \sin 2\pi b \cdot \cos\frac{3x}{4} = 0.$$

При $\sin 2\pi b = 0$ для любых x свойство выполняется:

$2\pi b = \pi n$; $b = \frac{n}{2} \mid n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: при $b = \frac{n}{2} \mid n \in \mathbb{Z}$ график функции

$f(x) = 3\operatorname{tg}\frac{bx}{15} + 2\sin\frac{8\pi b - 3x}{4}$ центрально-

симметричен относительно начала координат.

22. Найдите все рациональные значения параметра p, при которых функция $y = \cos\frac{2x}{\sqrt{3}+p^2} \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{\sqrt{12}-5p+3}$ была бы периодической.

Условие задачи, по сути, означает соизмеримость периодов функций $f(x) = \cos\frac{2x}{\sqrt{3}+p^2}$ и $\varphi(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{\sqrt{12}-5p+3}$.

Пусть основной период функции $f(x)$ равен T_1, а для $\varphi(x)$ – T_2.

а) Известно, что период функции $y = \cos ax$ равен $\frac{2\pi}{a}$, тогда $T_1 = \frac{2\pi}{\frac{2}{\sqrt{3}+p^2}} = \pi\left(\sqrt{3}+p^2\right)$.

б) Период функции $y = \operatorname{tg} ax$ равен $\frac{\pi}{a}$, тогда $T_2 = \frac{\pi}{\frac{1}{\sqrt{12}-5p+3}} = \pi\left(\sqrt{12}-5p+3\right)$.

Условие соизмеримости периодов означает, что

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{3}+p^2}{\sqrt{12}-5p+3} = \frac{m}{n}, \text{ где } \begin{cases} n, m \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0 \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

$\sqrt{3}n + np^2 = 2\sqrt{3}m - 5pm + 3m$; $np^2 + 5pm - 3m = \sqrt{3}\,(2m-n)$.

Так как левая часть рациональна, то и правая часть должна быть рациональна, что возможно только при $n = 2m$. Тогда $2mp^2 + 5pm - 3m = 0$.

Учитывая, что $m \neq 0$, получим

$$2p^2 + 5p - 3 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} p = 0{,}5 \\ p = -3 \end{array}\right..$$

Ответ: при $p \in \{-3;\ 0{,}5\}$ функция $y = \cos\frac{2x}{\sqrt{3}+p^2} \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{\sqrt{12}-5p+3}$ периодическая[1].

[1]Подробнее см. Шахмейстер А. Х. Тригонометрия. СПб.: «Петроглиф», 2009.

Тренировочная работа 6

1. При каких значениях параметра a уравнение $\cos^4 3x-2(a+1)\cos^2 3x-2a-3=0$ имеет хотя бы одно решение?

2. При каких значениях параметра a уравнение $2\cos^2 x-(2a+9)\cos x+9a=0$ не имеет решений?

3. При каких значениях параметра a уравнение $-20\sin^2 x=\left(a^2+13a+20\right)\sin x$ имеет только четыре корня на $[0;2\pi]$?

4. Найти все значения параметра a, при которых число $x=\frac{2\pi}{11}$ не является корнем уравнения $\left(x-\frac{2\pi}{11}\right)(x-4\pi)\sqrt{a^2-a-81+9\cos\frac{11x}{2}}=0$, а число $x=4\pi$ является корнем этого уравнения.

5. Решите и исследуйте уравнение $\sqrt{10\cos(5x+1)+19}=-13+8a-a^2$ с параметром a.

6. Решите и исследуйте неравенство $8\sin^2(13x-2)\geqslant 25a^2+10a+9$ с параметром a.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\cos 26x+2(4+11a)\sin 13x-154a+41=0$ имеет решение.

8. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{2}{1+\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=a$ решения не имеет?

9. При каких значениях параметра a уравнение $(15\sin x-a-5)(15\sin x+2a-5)=0$ имеет только два решения на отрезке $[0;2\pi]$?

10. Найти наименьшее значение параметра a, при котором уравнение $\cos x + \sin x = \sqrt{2}a$ имеет решение.

11. Найти наименьшее значение параметра a, при котором уравнение $\cos^6 \pi x + \sin^6 \pi x = a$ имеет решение.

12. При каких значениях параметра a уравнение $\arcsin x - \arccos(a - 2x) = \frac{\pi}{2}$ имеет решение?

13. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{9}{\pi}\arccos\frac{3\sqrt{2}+\sin x-\cos x}{4\sqrt{2}} = a$ имеет решение?

14. При каких значениях параметра b уравнение $\sin 2x = b$ имеет решение для любых $x \in \left[\arccos 0{,}8; \frac{5\pi}{12}\right]$?

15. При каких значениях параметра a уравнение $2 + \cos x\,(3\cos x + a\sin x) = 0$ не имеет решения?

16. Найдите все значения параметра a, при которых прямая $y = a$ пересекает хотя бы в одной точке график функции $y = \frac{19\sin x+17}{7\sin x+9}$.

17. Найдите все значения параметра m, при которых уравнение $\left(m^2-8m+15\right)\left(\cos 6x\cdot\cos\frac{\pi}{5}+\sin 6x\cdot\sin\frac{\pi}{5}\right) = 3m^2-12m-15$ имеет решение.

18. Найдите все значения параметра m, при которых график функции $f(x) = 4mx^5 - 3\sin\frac{4m\pi-x}{5}$ центрально-симметричен относительно начала координат.

19. Найдите все рациональные значения параметра k, при которых функция $y = \sin\frac{2x}{k^2+\sqrt{5}}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{\sqrt{125}-2k+3}$ была бы периодическая.

Решение тренировочной работы 6

1. При каких значениях параметра a уравнение $\cos^4 3x - 2(a+1)\cos^2 3x - 2a - 3 = 0$ имеет хотя бы одно решение?

Пусть $\cos^2 3x = t$; $t \in [0; 1]$;

$t^2 - 2(a+1)t - (2a+3) = 0$;

$t_{1,2} = a + 1 \pm \sqrt{(a+1)^2 + 2a + 3} = a + 1 \pm (a+2)$;

$\left[\begin{array}{l} t = 2a + 3 \\ t = -1 \quad \notin \quad [0; 1] \end{array}\right.$;

$0 \leqslant 2a + 3 \leqslant 1$; $\quad a \in [-1{,}5; -1]$.

Но можно решать и так, как в практикуме 6.

Ответ: при $a \in [-1{,}5; -1]$ уравнение $\cos^4 3x - 2(a+1)\cos^2 3x - 2a - 3 = 0$ имеет хотя бы одно решение.

2. При каких значениях параметра a уравнение $2\cos^2 x - (2a+9)\cos x + 9a = 0$ не имеет решений?

Пусть $\cos x = t$, тогда $t \in [-1; 1]$;

$D = (2a+9)^2 - 72a = (2a-9)^2 \geqslant 0$, значит корни есть всегда.

Значит возможное отсутствие корней связано с $t \notin [-1; 1]$.

$\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{2a+9+2a-9}{4} \\ t = \dfrac{2a+9-2a+9}{4} \end{array}\right.$; $\quad \left[\begin{array}{l} t = a \\ t = 4{,}5 \notin [-1; 1] \end{array}\right.$, значит $\left[\begin{array}{l} a > 1 \\ a < -1 \end{array}\right.$.

Но можно решать и так, как в практикуме 6.

Ответ: при $a \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ уравнение $2\cos^2 x - (2a+9)\cos x + 9a = 0$ не имеет решений.

3. При каких значениях параметра a уравнение $-20\sin^2 x = \left(a^2 + 13a + 20\right)\sin x$ имеет только четыре корня на $\left[0;\, 2\pi\right]$?

$\sin x\left(20\sin x + a^2 + 13a + 20\right) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0\,; \quad x = 0\,; \quad x = \pi\,; \quad x = 2\pi \\ \sin x = -\dfrac{a^2+13a+20}{20} \end{array}\right. .$$

Так как три корня уже есть независимо от значения a, то уравнение $\sin x = -\dfrac{a^2+13a+20}{20}$ должно иметь только одно решение на $\left[0;\, 2\pi\right]$, что возможно, если

$$\left[\begin{array}{l} -\dfrac{a^2+13a+20}{20} = 1 \\ -\dfrac{a^2+13a+20}{20} = -1 \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} a^2 + 13a + 40 = 0 \\ a^2 + 13a = 0 \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} a = -5 \\ a = -8 \\ a = -13 \\ a = 0 \end{array}\right. .$$

Ответ: при $a \in \left\{-13;\, -8;\, -5;\, 0\right\}$ уравнение $-20\sin^2 x = \left(a^2 + 13a + 20\right)\sin x$ имеет только четыре корня на $\left[0;\, 2\pi\right]$.

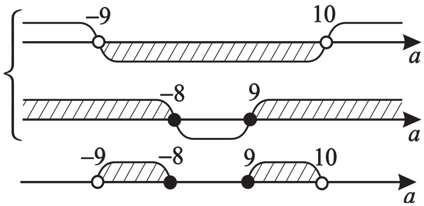
4. Найти все значения параметра a, при которых число $x = \dfrac{2\pi}{11}$ не является корнем уравнения

$\left(x - \dfrac{2\pi}{11}\right)\left(x - 4\pi\right)\sqrt{a^2 - a - 81 + 9\cos\dfrac{11x}{2}} = 0$, а число $x = 4\pi$ является корнем этого уравнения.

Чтобы выполнялись все условия, необходимо:

$$\left\{\begin{array}{l} a^2 - a - 81 + 9\cdot\cos\left(\dfrac{11}{2}\cdot\dfrac{2\pi}{11}\right) < 0 \\ a^2 - a - 81 + 9\cdot\cos\left(\dfrac{11}{2}\cdot 4\pi\right) \geqslant 0 \end{array}\right. , \text{ но тогда}$$

$$\begin{cases} a^2 - a - 81 + 9\cdot(-1) < 0 \\ a^2 - a - 81 + 9\cdot 1 \geqslant 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} (a-10)(a+9) < 0 \\ (a-9)(a+8) \geqslant 0 \end{cases}.$$



Ответ: при $a \in (-9; -8] \cup [9; 10)$ число $x = \dfrac{2\pi}{11}$ не является корнем уравнения

$$\left(x - \frac{2\pi}{11}\right)(x - 4\pi)\sqrt{a^2 - a - 81 + 9\cos\frac{11x}{2}} = 0,$$

а число $x = 4\pi$ является корнем этого уравнения.

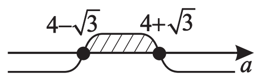
5. Решите и исследуйте уравнение

$\sqrt{10\cos(5x+1)+19} = -13 + 8a - a^2$ с параметром a.

Уравнение равносильно системе

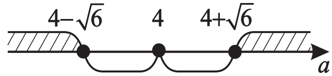
$$\begin{cases} -13 + 8a - a^2 \geqslant 0 \\ 10\cos(5x+1) + 19 = \left(-13 + 8a - a^2\right)^2 \end{cases}, \text{ тогда}$$

$$\begin{cases} -\left(a^2 - 8a + 13\right) \geqslant 0 \\ \cos(5x+1) = \dfrac{\left(a^2-8a+13\right)^2 - 19}{10} \end{cases}.$$



Но $\cos(5x+1) \in [-1; 1]$, значит $\begin{cases} \dfrac{\left(a^2-8a+13\right)^2-19}{10} \leqslant 1 \\ \dfrac{\left(a^2-8a+13\right)^2-19}{10} \geqslant -1 \end{cases};$

$$\begin{cases} \left(a^2 - 8a + 13\right)^2 \leqslant 29 \\ \left(a^2 - 8a + 13\right)^2 - 9 \geqslant 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \left(a^2 - 8a + 13\right)^2 \leqslant 29 \\ \left(a^2 - 8a + 10\right)(a-4)^2 \geqslant 0 \end{cases}.$$

Так как $\left(a^2-8a+10\right)\left(a-4\right)^2 \geqslant 0$, 

то только $a=4 \in \left[4-\sqrt{3};\, 4+\sqrt{3}\right]$, остальные нет,

т.е. проверить условие $\left(a^2-8a+13\right)^2 \leqslant 29$ необходимо только для $a=4$.

$\left(16-8\cdot 4+13\right)^2 \leqslant 29$, $\quad \left(-3\right)^2 \leqslant 29$ – истина.

Тогда $\cos\left(5x+1\right)=-1$;

$5x+1=\pi+2\pi k$; $\quad x=\dfrac{\pi-1}{5}+\dfrac{2}{5}\pi k$.

Ответ: уравнение $\sqrt{10\cos\left(5x+1\right)+19}=-13+8a-a^2$ имеет решение только при $a=4$. Тогда $x=\dfrac{\pi-1}{5}+\dfrac{2}{5}\pi k \mid k\in\mathbb{Z}$.

6. Решите и исследуйте неравенство $8\sin^2\left(13x-2\right) \geqslant 25a^2+10a+9$ с параметром a.

Так как $\sin^2 x\left(13x-2\right) \in \left[0;1\right]$, то $\dfrac{25a^2+10a+9}{8} \leqslant 1$.

Тогда $25a^2+10a+1 \leqslant 0$,

т.е. $\left(5a+1\right)^2 \leqslant 0$, значит $a=-\dfrac{1}{5}$.

Тогда $8\sin^2\left(13x-2\right) \geqslant 25\cdot\left(-\dfrac{1}{5}\right)^2+10\left(-\dfrac{1}{5}\right)+9$,

т.е. $\sin^2\left(13x-2\right) \geqslant 1$, но это значит что

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(13x-2\right)=1\\ \sin\left(13x-2\right)=-1\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}13x-2=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\\ 13x-2=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi+4}{26} + \dfrac{2}{13}\pi k \\ x = -\dfrac{\pi+4}{26} + \dfrac{2}{13}\pi n \end{array}\right. .$$

Ответ: неравенство $8\sin^2(13x-2) \geqslant 25a^2 + 10a + 9$ имеет решение только при $a = -\dfrac{1}{5}$.

Тогда $x \in \left\{\dfrac{\pi+4}{26} + \dfrac{2}{13}\pi k; -\dfrac{\pi+4}{26} + \dfrac{2}{13}\pi n \;\middle|\; k; n \in \mathbb{Z}\right\}$.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\cos 26x + 2(4+11a)\sin 13x - 154a + 41 = 0$ имеет решение.

Так как $\cos 26x = 1 - 2\sin^2 13x$, то

$1 - 2\sin^2 13x + 2(4+11a)\sin 13x - 154a + 41 = 0$.

Пусть $\sin 13x = t$, тогда $2t^2 - 2(4+11a)t + 154a - 42 = 0$;

$t^2 - (4a+11a)t + 77a - 21 = 0$.

$D = (4+11a)^2 - 308a + 84 = 16 + 88a + 121a^2 - 308a + 84 =$

$= 100 - 220a + 121a^2 = (10-11a)^2 \geqslant 0$.

$$\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{4+11a+10-11a}{2} \\ t = \dfrac{4+11a-10+11a}{2} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} t = 7 \quad \notin [-1;1] \\ t = 11a - 3 \end{array}\right. .$$

Чтобы уравнение имело решение, необходимо чтобы

$$\begin{cases} 11a - 3 \leqslant 1 \\ 11a - 3 \geqslant -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} a \leqslant \dfrac{4}{11} \\ a \geqslant \dfrac{2}{11} \end{cases}.$$

Ответ: при $a \in \left[\dfrac{2}{11}; \dfrac{4}{11}\right]$ уравнение

$\cos 26x + 2(4+11a)\sin 13x - 154a + 41 = 0$ имеет решение.

8. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{2}{1+\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = a$ решения не имеет?

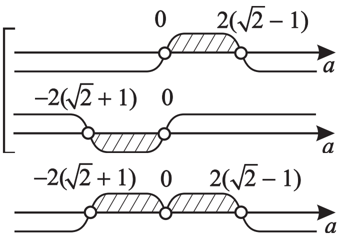
Уравнение равносильно $\dfrac{2}{a} = 1 + \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ при $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \neq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

тогда $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{2-a}{\sqrt{2}a}$ $\left(\dfrac{2-a}{\sqrt{2}a} \neq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \quad (\forall a)\right)$.

Чтобы решение отсутствовало, необходимо

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{2-a}{\sqrt{2}a} > 1 \\ \dfrac{2-a}{\sqrt{2}a} < -1 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{2-a\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}a} > 0 \\ \dfrac{2-a\left(1-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}a} < 0 \end{array}\right..$$

Так как $\begin{array}{l} \dfrac{2}{\sqrt{2}+1} = 2\left(\sqrt{2}-1\right) \\ \dfrac{2}{1-\sqrt{2}} = -2\left(\sqrt{2}+1\right) \end{array}$, то можно изобразить решение совокупности так.



Отметим, что при $a = 0$ решения нет, так как если $\dfrac{2}{1+\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = 0$, то $x \in \varnothing$.

Ответ: при $a \in \left(-2\left(\sqrt{2}+1\right); 2\left(\sqrt{2}-1\right)\right)$ уравнение $\dfrac{2}{1+\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = a$ решения не имеет.

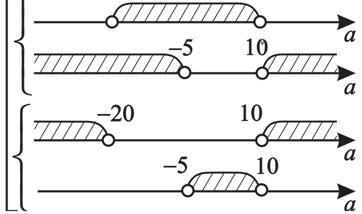
9. При каких значениях параметра a уравнение $(15\sin x - a - 5)(15\sin x + 2a - 5) = 0$ имеет только два решения на отрезке $[0; 2\pi]$?

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{a+5}{15} \\ \sin x = \dfrac{5-2a}{15} \end{array}\right. .$$

1) Три корня уравнение имеет, если $\dfrac{a+5}{15}\cdot\dfrac{5-2a}{15} = 0$;
$\left[\begin{array}{l} a = -5 \\ a = 2{,}5 \end{array}\right.$, так как $\sin x = 0$ на интервале $[0; 2\pi]$ имеет три корня.

2) Данное уравнение имеет два корня с учетом результатов предыдущего пункта, если

a) $$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{a+5}{15} \in (-1; 1) \\ \dfrac{5-2a}{15} \notin [-1; 1] \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{a+5}{15} \notin [-1; 1] \\ \dfrac{5-2a}{15} \in (-1; 1) \end{cases} \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \begin{cases} \dfrac{a+5}{15} < 1 \\ \dfrac{a+5}{15} > -1 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{5-2a}{15} < -1 \\ \dfrac{5-2a}{15} > 1 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dfrac{a+5}{15} > 1 \\ \dfrac{a+5}{15} < -1 \end{array}\right. \\ \dfrac{5-2a}{15} < 1 \\ \dfrac{5-2a}{15} > -1 \end{cases} \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \begin{cases} a < 10 \\ a > -20 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} a > 10 \\ a < -5 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a > 10 \\ a < -20 \end{array}\right. \\ \begin{cases} a < 10 \\ a > -5 \end{cases} \end{cases} \end{array}\right. ;$$



$a \in (-20; -5)$.

б) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{a+5}{15}=1\\ \dfrac{5-2a}{15}=-1\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{a+5}{15}=-1\\ \dfrac{5-2a}{15}=1\end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=10\\ a=10\end{cases}\\ \begin{cases}a=-20\\ a=-5\end{cases}\end{array}\right.$;

в) $\dfrac{a+5}{15}=\dfrac{5-2a}{15}$; $a=0$, тогда $\sin x=\dfrac{1}{3}$ на $[0;2\pi]$ имеет два корня.

Ответ: при $a\in(-20;-5)\cup\{10;0\}$ уравнение $(15\sin x-a-5)(15\sin x+2a-5)=0$ имеет только два решения на отрезке $[0;2\pi]$.

10. Найти наименьшее значение параметра a, при котором уравнение $\cos x+\sin x=\sqrt{2}a$ имеет решение.

Так как $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, то

$\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}a$.

Значит $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=a$, но $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\in[-1;1]$,

тогда $|a|\leqslant 1$.

Ответ: $a=-1$ – наименьшее значение параметра a, при котором уравнение $\cos x+\sin x=\sqrt{2}a$ имеет решение.

11. Найти наименьшее значение параметра a, при котором уравнение $\cos^6\pi x+\sin^6\pi x=a$ имеет решение.

$\cos^6\pi x+\sin^6\pi x=$

$=\left(\cos^2\pi x+\sin^2\pi x\right)\left(\cos^4\pi x-\cos^2\pi x\cdot\sin^2\pi x+\sin^4\pi x\right)=$

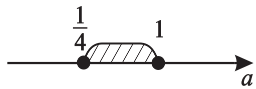
$=\cos^4\pi x-\cos^2\pi x\cdot\sin^2\pi x+\sin^4\pi x=$

$= \left(\cos^2 \pi x + \sin^2 \pi x\right)^2 - 3\cos^2 \pi x \cdot \sin^2 \pi x =$

$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\pi x = a$;

$\sin^2 2\pi x = \frac{4(1-a)}{3}$, но $\sin^2 2\pi x \in [0; 1]$.

Тогда $\begin{cases} \frac{4(1-a)}{3} \leqslant 1 \\ \frac{4(1-a)}{3} \geqslant 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{1-4a}{3} \leqslant 0 \\ a \leqslant 1 \end{cases}$.



Ответ: $a = \frac{1}{4}$ – наименьшее значение параметра a, при котором уравнение $\cos^6 \pi x + \sin^6 \pi x = a$ имеет решение.

12. При каких значениях параметра a уравнение

$\arcsin x - \arccos(a - 2x) = \frac{\pi}{2}$ имеет решение?

Из уравнения следует, что $\arcsin x - \frac{\pi}{2} = \arccos(a - 2x)$.

Значит $\arccos(a - 2x) \leqslant 0$, так как по определению

$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Вычтем из обеих частей двойного

неравенства $-\frac{\pi}{2}$, тогда $-\pi \leqslant \arcsin x - \frac{\pi}{2} \leqslant 0$. С другой стороны, по определению $\pi \geqslant \arccos(a - 2x) \geqslant 0$. Значит

$\arccos(a - 2x) = 0$; $a - 2x = 1$; $x = \frac{a-1}{2}$,

тогда и $\arcsin x - \frac{\pi}{2} = 0$, т.е. $x = 1$. Отсюда следует,

что $1 = \frac{a-1}{2}$; $a = 3$.

Ответ: только при $a = 3$ уравнение

$\arcsin x - \arccos(a - 2x) = \frac{\pi}{2}$ имеет решение.

13. При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{9}{\pi}\arccos\frac{3\sqrt{2}+\sin x-\cos x}{4\sqrt{2}}=a$$ имеет решение?

$$\frac{3\sqrt{2}+\sin x-\cos x}{4\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{4\sqrt{2}}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Чтобы существовал $\arccos\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)$, необходимо чтобы $-1\leqslant\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$; $-\frac{7}{4}\leqslant\frac{1}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\frac{1}{4}$;

$-7\leqslant\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$, что верно для любых x,

но $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\in[-1;1]$. Пусть $t=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$,

тогда $t_{\text{наим}}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot(-1)=\frac{1}{2}$ и $t_{\text{наиб}}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot 1=1$.

Так как в силу непрерывности функция $y=\arccos x$ пробегает все значения на $[0;\pi]$, $y=\arccos x \downarrow$,

$\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$ и $\arccos 1=0$, то

$$0\leqslant\arccos\frac{3\sqrt{2}+\sin x-\cos x}{4\sqrt{2}}\leqslant\frac{\pi}{3}.$$

Умножим все части двойного неравенства на $\frac{9}{\pi}$.

$$0\leqslant\frac{9}{\pi}\arccos\frac{3\sqrt{2}+\sin x-\cos x}{4\sqrt{2}}\leqslant 3.$$

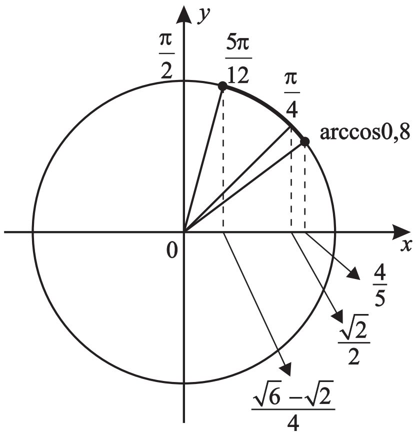
Ответ: уравнение $\frac{9}{\pi}\arccos\frac{3\sqrt{2}+\sin x-\cos x}{4\sqrt{2}}=a$ имеет решение при $a\in[0;3]$.

Примечание. Идеи задачи могут быть сформулированы иначе, например: при каких значениях параметра a уравнение $\frac{9}{\pi}\arccos\frac{3\sqrt{2}+\sin x-\cos x}{4\sqrt{2}}=a$ имеет единственный корень на $[0;2\pi]$?

14. При каких значениях параметра b уравнение $\sin 2x = b$ имеет решение для любых $x \in \left[\arccos 0{,}8; \frac{5\pi}{12}\right]$?

$x \in \left[\arccos 0{,}8; \frac{5\pi}{12}\right] \subset \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Рассмотрим эти углы на тригонометрическом круге.



$$\cos\frac{5\pi}{12} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{5}{6}\pi}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

так как $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{3}+1}{2}} = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2}} =$

$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

Далее учтём, что $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{4}{5}$.

В силу того, что $y = \arccos x$ непрерывна и убывает на $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\frac{5}{12}\pi > \frac{\pi}{4} > \arccos 0{,}8$, так как $\arccos\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{5\pi}{12}$ и $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Тогда $\frac{5\pi}{6} > \frac{\pi}{2} > 2\arccos 0{,}8$.

Вычислим:

а) $\sin 2\arccos 0{,}8$; $\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$

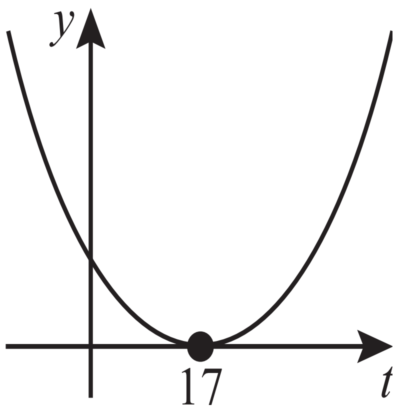
$$\sin\left(\arccos 0{,}8\right) = \sqrt{1-\cos^2\arccos 0{,}8} = \sqrt{1-\left(0{,}8\right)^2} = 0{,}6\ ;$$

$$\cos\left(\arccos 0{,}8\right) = 0{,}8\ ;$$

Значит $\sin 2\arccos 0{,}8 = 2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}8 = 0{,}96$.

б) $\sin\frac{5}{6}\pi = \sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = 0{,}5$.

На тригонометрическом круге это выглядит так.



Итак, в силу непрерывности функции $y = \sin 2x$

на $\left[\arccos 0{,}8; \frac{5\pi}{12}\right]$ $\quad 0{,}5 \leqslant b \leqslant 1$.

Ответ: уравнение $\sin 2x = b$ имеет решение

на $\left[\arccos 0{,}8; \frac{5\pi}{12}\right]$ при $b\in\left[0{,}5; 1\right]$.

Примечание. Идеи задачи могут быть использованы иначе. Например:

1) Найти $E\left(y\right)$ для функции $y = \sin 2x$, если

$$D\left(y\right) = \left[\arccos 0{,}8; \frac{5\pi}{12}\right].$$

2) При каких значениях параметра b уравнение $\sin 2x = b$ на $\left[\arccos 0{,}8; \frac{5\pi}{12}\right]$ имеет два корня $(0{,}96 \leqslant b < 1)$?

3) При каких значениях параметра b уравнение $\sin 2x = b$ на $\left[\arccos 0{,}8; \frac{5\pi}{12}\right]$ имеет единственный корень $\left(0{,}5 \leqslant b < 0{,}96;\ \ b = 1\right)$?

15. При каких значениях параметра a уравнение $2 + \cos x\left(3\cos x + a\sin x\right) = 0$ не имеет решения?

Дано $2 + \cos x\left(3\cos x + a\sin x\right) = 0$.

Выполнив действия, получим

$2 + 3\cos^2 x + a\sin x \cdot \cos x = 0$.

Преобразуем уравнение, зная,

что $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$; $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$.

Тогда $2 + \frac{3(1+\cos 2x)}{2} + \frac{a}{2}\sin 2x = 0$;

$4 + 3 + 3\cos 2x + a\sin 2x = 0$; $3\cos 2x + a\sin 2x = -7$.

Далее вспомним, что

$$m\cos x + n\sin x = \sqrt{m^2+n^2}\left(\frac{m\cos x}{\sqrt{m^2+n^2}} + \frac{n\sin x}{\sqrt{m^2+n^2}}\right) =$$

$$= \sqrt{m^2+n^2}\left(\cos\varphi_0 \cdot \cos x + \sin\varphi_0 \cdot \sin x\right) = \sqrt{m^2+n^2} \cdot \cos\left(x - \varphi_0\right),$$

где $\begin{cases} \cos\varphi_0 = \dfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2}} \\ \sin\varphi_0 = \dfrac{n}{\sqrt{m^2+n^2}} \end{cases}$.

Тогда $3\cos 2x + a\sin 2x = \sqrt{9+a^2} \cdot \cos\left(2x - \varphi_0\right)$,

т.е. $\sqrt{9+a^2}\cos\left(2x - \varphi_0\right) = -7$; $\cos\left(2x - \varphi_0\right) = -\frac{7}{\sqrt{9+a^2}}$.

Чтобы решения не было, необходимо чтобы

$$\left[\begin{array}{l} -\dfrac{7}{\sqrt{9+a^2}} > 1 \\ -\dfrac{7}{\sqrt{9+a^2}} < -1 \end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ \sqrt{a^2+9} < 7 \end{array}\right.;\ a^2 < 40;\ a \in \left(-2\sqrt{10};\, 2\sqrt{10}\right).$$

Ответ: при $a \in \left(-2\sqrt{10};\, 2\sqrt{10}\right)$ уравнение

$2+\cos x\left(3\cos x + a\sin x\right) = 0$ не имеет решения.

Примечание. Задача может быть переформулирована иначе. Например: при каких значениях параметра a значение выражения $2+\cos x\left(3\cos x + a\sin x\right)$ не равно нулю при любых значениях x?

16. Найдите все значения параметра a, при которых прямая $y = a$ пересекает хотя бы в одной точке график функции $y = \dfrac{19\sin x+17}{7\sin x+9}$.

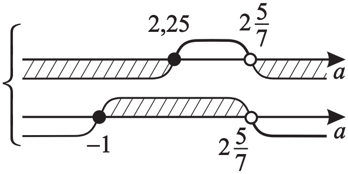
$\dfrac{19\sin x+17}{7\sin x+9} = a$; $19\sin x + 17 = 7a\sin x + 9a$;

$\left(19 - 7a\right)\sin x = 9a - 17$;

$\sin x = \dfrac{9a-17}{19a-7a}$; но $\sin x \in \left[-1; 1\right]$,

тогда $-1 \leqslant \dfrac{9a-17}{19a-7a} \leqslant 1$;

$$\begin{cases} \dfrac{16a-36}{19-7a} \leqslant 0 \\ \dfrac{2a+2}{19-7a} \geqslant 0 \end{cases}.$$



$a \in \left[-1; 2{,}25\right]$.

Ответ: при $a \in \left[-1; 2{,}25\right]$ прямая $y = a$ пересекает хотя бы в одной точке график функции $y = \dfrac{19\sin x+17}{7\sin x+9}$.

17. Найдите все значения параметра m, при которых уравнение

$$\left(m^2-8m+15\right)\left(\cos 6x\cdot\cos\frac{\pi}{5}+\sin 6x\cdot\sin\frac{\pi}{5}\right)=3m^2-12m-15$$

имеет решение.

Преобразуем правую и левую часть уравнения, получим

$$(m-3)(m-5)\cos\left(6x-\frac{\pi}{5}\right)=3(m-5)(m+1);$$

$$(m-5)\left((m-3)\cos\left(6x-\frac{\pi}{5}\right)-3(m+1)\right)=0.$$

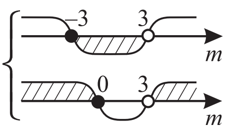
а) При $m=5$ любое x – решение.

б) При $m=3$ $\quad x\in\varnothing$.

в) При $\begin{cases} m\neq 3 \\ m\neq 5 \end{cases}$ $\quad \cos\left(6x-\dfrac{\pi}{5}\right)=\dfrac{3(m+1)}{m-3}$.

Для существования решения необходимо, чтобы

$$\begin{cases} \dfrac{3(m+1)}{m-3}\leqslant 1 \\ \dfrac{3(m+1)}{m-3}\geqslant -1 \end{cases};\qquad \begin{cases} \dfrac{2(m+3)}{m-3}\leqslant 0 \\ \dfrac{4m}{m-3}\geqslant 0 \end{cases};$$



$[-3;\,0]$.

Ответ: уравнение

$$\left(m^2-8m+15\right)\left(\cos 6x\cdot\cos\frac{\pi}{5}+\sin 6x\cdot\sin\frac{\pi}{5}\right)=3m^2-12m-15$$

имеет решение при $m\in[-3;\,0]\cup\{5\}$.

18. Найдите все значения параметра m, при которых график функции $f(x)=4mx^5-3\sin\dfrac{4m\pi-x}{5}$ центрально-симметричен относительно начала координат.

Условие центральной симметричности графика функции относительно начала координат означает, что функция нечетная, т.е. $f(-x)=-f(x)$. Значит

$$4m(-x)^5-3\sin\frac{4m\pi-(-x)}{5}=-4mx^5+3\sin\frac{4m\pi-x}{5};$$

$$3\left(\sin\frac{4m\pi-x}{5}+\sin\frac{4m\pi+x}{5}\right)=0;$$

$$\sin\frac{4m\pi-x+4m\pi+x}{10}\cdot\cos\frac{4m\pi-x-4m\pi-x}{10}=0;$$

$$\sin\frac{4m\pi}{5}\cdot\cos\left(-\frac{x}{5}\right)=0.$$

При $\sin\frac{4m\pi}{5}=0$ для любых x свойство нечетности выполняется. $\frac{4m\pi}{5}=\pi n$; $m=\frac{5n}{4}\mid n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: при $m=\frac{5n}{4}\mid n\in\mathbb{Z}$ график функции

$f(x)=4mx^5-3\sin\frac{4m\pi-x}{5}$ центрально-симметричен относительно начала координат.

19. Найдите все рациональные значения параметра k, при которых функция $y=\sin\frac{2x}{k^2+\sqrt{5}}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{\sqrt{125}-2k+3}$ была бы периодическая.

Условие задачи означает, что основные периоды[1] функций $f(x)=\sin\frac{2x}{k^2+\sqrt{5}}$ и $\varphi(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{\sqrt{125}-2k+3}$ должны быть соизмеримы: $\frac{T_1}{T_2}=\frac{m}{n}\mid m,n\in\mathbb{Z},\ m\cdot n\neq 0$,

где T_1 – период функции $f(x)$, T_2 – период функции $\varphi(x)$.

а) Так как основной период функции $y=\sin ax$ равен $T_0=\frac{2\pi}{a}$, то $T_1=\frac{2\pi}{\frac{2}{k^2+\sqrt{5}}}=\pi\left(k^2+\sqrt{5}\right)$.

б) Так как основной период функции $y=\operatorname{tg}ax$ равен $T_0=\frac{\pi}{a}$, то $T_2=\frac{\pi}{\frac{1}{\sqrt{125}-2k+3}}=\pi\left(5\sqrt{5}-2k+3\right)$.

Значит $nk^2+\sqrt{5}n=5\sqrt{5}m-2mk+3m$, отсюда

$nk^2+2mk-3m=\sqrt{5}\,(5m-n)$.

[1]Подробнее см. Шахмейстер А. Х. Тригонометрия. СПб.: «Петроглиф», 2009.

Левая часть уравнения – рациональное выражение, значит и правая часть его должна быть рациональной, что возможно только при $n = 5m$.

Тогда уравнение примет вид $5mk^2 + 2mk - 3m = 0$.

Так как $m \neq 0$, то $5k^2 + 2k - 3 = 0$; $\left[\begin{array}{l} k = -1 \\ k = \dfrac{3}{5} \end{array}\right.$.

Ответ: при $k \in \{0{,}6; -1\}$ функция

$$y = \sin\frac{2x}{k^2+\sqrt{5}} \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{\sqrt{125}-2k+3}$$ периодическая.

7

Показательные уравнения и неравенства

Практикум 7

1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $25^x + \left(5a^2 + a + 4\right) \cdot 5^x - a - 2 = 0$ имеет единственный корень.

$D = \left(5a^2 + a + 4\right)^2 + 4\left(a + 2\right)$. Так решать технически сложно, будем решать иначе, зная, что $5^x > 0$ всегда.

а) Если $-a - 2 < 0$, то корень всегда есть, и только один положительный $5^x = t > 0$, что и нужно.
И так как $a > -2$, то $D > 0$.

б) Если $a < -2$, то оба корня меньше нуля, и это не подходит ($5^x > 0$), так как $5a^2 + a + 4 > 0$ для $\forall a$.

в) Если $a = -2$, то

$$\left[\begin{array}{l} 5^x = 0 \\ 5^x = -\left(5a^2 + a + 4\right) \end{array}\right. \quad \varnothing.$$

Ответ: при $a > -2$ уравнение

$$25^x + \left(5a^2 + a + 4\right) \cdot 5^x - a - 2 = 0$$

имеет единственный корень.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых решением системы неравенств

$$\begin{cases} 6^{x-a-3} \leqslant 36^{x-a+4} \\ 4^{x-2a-2} \geqslant 16^{x-3a+3} \end{cases}$$ является отрезок длиной 3.

$$\begin{cases} x-a-3 \leqslant 2x-2a+8 \\ x-2a-2 \geqslant 2x-6a+6 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x \geqslant a-11 \\ x \leqslant 4a-8 \end{cases};$$

тогда $a-11 \leqslant x \leqslant 4\left(a-2\right)$.

Рассмотрим разность концов отрезка

$$4\left(a-2\right)-\left(a-11\right)=3; \qquad 3a+3=3; \qquad a=0.$$

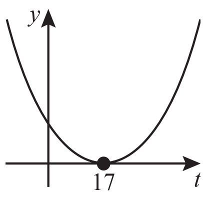
Ответ: при $a=0$ решением системы неравенств $\begin{cases} 6^{x-a-3} \leqslant 36^{x-a+4} \\ 4^{x-2a-2} \geqslant 16^{x-3a+3} \end{cases}$ является отрезок длиной 3.

3. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $9^x-\left(7a-1\right)\cdot 3^x+12a^2-a-6 \leqslant 0$ имеет единственное решение.

Пусть $3^x=t \quad \left(t>0\right)$, тогда неравенство примет вид
$t^2-\left(7a-1\right)t+12a^2-a-6 \leqslant 0$;

а) $D=\left(7a-1\right)^2-48a^2+4a+24=a^2-10a+25=\left(a-5\right)^2$;

при $a=5 \quad D=0$.



При $a=5 \quad t_1=t_2=\dfrac{7\cdot5-1}{2}=17>0 \quad (3^x>0)$.

б) При $a \neq 5$ неравенство имеет более одного решения, что не подходит по условию задачи.

Ответ: при $a=5$ неравенство $9^x-\left(7a-1\right)\cdot 3^x+12a^2-a-6 \leqslant 0$ имеет единственное решение.

4. Найдите все значения параметра a, при которых один из корней уравнения $64^x - 8^x \cdot \left(8^{5a-2} + 8^{4a-3}\right) + 8^{9a-5} = 0$ больше другого в 3 раза.

Пусть $x_1 = 3x_2$.

Так как $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$, $\begin{cases} x_1 + x_2 = 8^{5a-2} + 8^{4a-3} = 4x_2 \\ x_1 \cdot x_2 = 8^{9a-5} = 3x_2^2 \end{cases}$;

$$\left(\frac{8^{5a-2}+8^{4a-3}}{4}\right)^2 = \frac{8^{9a-5}}{3};$$

$$3 \cdot 8^{10a-4} + 6 \cdot 8^{9a-5} + 3 \cdot 8^{8a-6} = 16 \cdot 8^{9a-5};$$

$$3 \cdot 8^{2a+2} + 6 \cdot 8^{a+1} - 16 \cdot 8^{a+1} + 3 = 0;$$

$$3 \cdot 8^{2(a+1)} - 10 \cdot 8^{a+1} + 3 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} 8^{a+1} = 3 \\ 8^{a+1} = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} a = \log_8 0{,}375 \\ a = \log_8 \dfrac{1}{24} = -1 - \log_8 3 \end{array}\right..$$

Ответ: при $a = \log_8 0{,}375$ и $a = -1 - \log_8 3$ один из корней уравнения $64^x - 8^x \cdot \left(8^{5a-2} + 8^{4a-3}\right) + 8^{9a-5} = 0$ больше другого в 3 раза.

5. Найдите все значения параметра a, при которых прямая $y = a$ и график функции $y = \dfrac{12 \cdot 16^x + 11}{2 - 13 \cdot 16^x}$ не имеют общих точек.

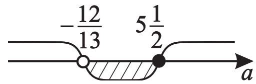
$\dfrac{12 \cdot 16^x + 11}{2 - 13 \cdot 16^x} = a$, т.е. необходимо выяснить, при каких значениях параметра a уравнение не имеет корней.

$$12 \cdot 16^x + 11 = 2a - 13a \cdot 16^x;$$

$$(13a + 12)\, 16^x = 2a - 11.$$

Учтём, что $16^x > 0$ всегда.

а) $13a+12 \neq 0$; $\quad 16^x = \dfrac{2a-11}{13a+12} \leqslant 0$;



б) $13a+12=0$; $\quad x \in \varnothing \quad \left(0 \cdot 16^x = -12\dfrac{11}{13}\right)$.

Ответ: при $a \in \left[-\dfrac{12}{13}; 5\dfrac{1}{2}\right]$ прямая $y=a$ и график

функции $y = \dfrac{12 \cdot 16^x + 11}{2 - 13 \cdot 16^x}$ не имеют общих точек.

6. Найдите все значения параметра a, при которых ни одно из чисел 1 и -3 не является корнем уравнения

$\left(x^2+2x-3\right)\sqrt{6^{x^2+2x-3}+a^2-14a+44} = 0$.

Уравнение $\left(x^2+2x-3\right)\sqrt{6^{x^2+2x-3}+a^2-14a+44} = 0$

равносильно $\begin{cases} 6^{x^2+2x-3}+a^2-14a+44 \geqslant 0 \\ \left(x^2+2x-3\right)\left(6^{x^2+2x-3}+a^2-14a+44\right)=0 \end{cases}$.

Если $x^2+2x-3=0$, то $x=1$ или $x=-3$ – это корни второго уравнения системы.

Пусть $x=1$, тогда $6^0+a^2-14a+44<0$ (чтобы решения не подходили);

$(a-5)(a-9)<0$; $\quad a \in (5; 9)$.

Пусть $x=-3$, чтобы корни не подходили, тогда

$6^0+a^2-14a+44<0$;

$(a-5)(a-9)<0$; $a \in (5; 9)$.

Ответ: при $a \in (5; 9)$ $x=1$ и $x=-3$ не являются корнями уравнения

$\left(x^2+2x-3\right)\sqrt{6^{x^2+2x-3}+a^2-14a+44} = 0$.

7. Найдите все значения параметра a, при которых выражение $x+y$ принимает наименьшее возможное значение, если $(x;\, y)$ – решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3^x + 2^y = 3^{49a^2+1} + 2^{1-4a} \\ 3^x + 2^{1-4a} = 3^{49a^2+1} + 2^y \end{cases}.$$

$$\pm \begin{cases} 3^x + 2^y = 3^{49a^2+1} + 2^{1-4a} \\ 3^x - 2^y = 3^{49a^2+1} - 2^{1-4a} \end{cases} \quad \boxed{1} \pm \boxed{2};$$

$$\begin{cases} 3^x = 3^{49a^2+1} \\ 2^y = 2^{1-4a} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 49a^2 + 1 \\ y = 1 - 4a \end{cases};$$

$f\,(x;\, y) = x + y = 49a^2 - 4a + 2$ (квадратный трехчлен).

При $a_0 = \dfrac{2}{49}$ $\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ $\quad t_0 = 49 \cdot \dfrac{4}{49^2} - \dfrac{4{\cdot}2}{49} + 2 = \dfrac{4-8+98}{49} = \dfrac{94}{49}$.

Ответ: при $a = \dfrac{2}{49}$ выражение $x+y$ принимает наименьшее возможное значение, если $(x;\, y)$ – решение системы уравнений

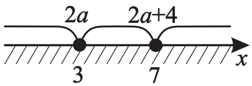
$$\begin{cases} 3^x + 2^y = 3^{49a^2+1} + 2^{1-4a} \\ 3^x + 2^{1-4a} = 3^{49a^2+1} + 2^y \end{cases}.$$

8. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $\left(4^x - 64\right)\left(2^x - 128\right)\left(8^x - 8^{2a}\right)\left(7^x - 7^{2a+4}\right) \leqslant 0$ имеет только два решения. Найдите эти решения.

$$\left(4^x - 4^3\right)\left(2^x - 2^7\right)\left(8^x - 8^{2a}\right)\left(7^x - 7^{2a+4}\right) \leqslant 0;$$

Корни неравенства $\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 7 \\ x = 2a \\ x = 2a + 4 \end{array}\right.$;

очевидно, что корни $x = 3$ и $x = 7$ должны быть кратными двум другим корням ($2a + 4 \neq 2a$; $2a + 4 > 2a$).



Это возможно только при $a = 1{,}5$, так как $\begin{cases} 2a = 3 \\ 2a + 4 = 7 \end{cases}$.

Ответ: при $a = 1{,}5$ неравенство

$\left(4^x - 64\right)\left(2^x - 128\right)\left(8^x - 8^{2a}\right)\left(7^x - 7^{2a+4}\right) \leqslant 0$ имеет только два решения $x = 3$ и $x = 7$.

9. Уравнение $4^{49x^2 - 70x + 26} = \cos 14\pi x - 81a^2 - 72a - 13$ имеет решения. Найдите эти решения и укажите, при каких значениях параметра a это возможно.

Так как $4^{(7x-5)^2+1} \geqslant 4$ для $\forall x$

$\left(49x^2 - 70x + 26 = (7x - 5)^2 + 1 \geqslant 1\right)$, то

$\cos 14\pi x - (9a + 4)^2 + 3 \geqslant 4$

$\left(81a^2 + 72a + 13 = (9a + 4)^2 - 3\right)$.

Значит $\cos 14\pi x \geqslant 1 + (9a + 4)^2$, но $\cos 14\pi x \in [-1; 1]$.

Значит возможно только $\cos 14\pi x = 1$,

если $a = -\dfrac{4}{9}$ и $x = \dfrac{5}{7}$.

$14\pi x = 2\pi k$; $x = \dfrac{k}{7}$, но $x = \dfrac{5}{7}$, т.е. $k = 5$.

Значит $x = \dfrac{k}{7}$, где $k = 5$.

Ответ: при $a = -\dfrac{4}{9}$ уравнение

$4^{49x^2 - 70x + 26} = \cos 14\pi x - 81a^2 - 72a - 13$ имеет решение $x = \dfrac{5}{7}$; при $a \neq -\dfrac{4}{9}$ решения нет.

10. Уравнение $\left(3a^2-10a+3\right)^2+\left(3^{x^2+x}-243a\right)^2=0$ имеет решения. Найдите эти решения и укажите, при каких a это возможно.

Так как $a^2+b^2=0$, только если $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$, то

$$\begin{cases} 3a^2-10a+3=0 \\ 3^{x^2+x}=243a \end{cases}; \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \\ 3^{x^2+x}=3^5\cdot a \end{cases}, \text{ тогда } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=3 \\ 3^{x^2+x}=3^6 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \\ 3^{x^2+x}=3^4 \end{cases} \end{array}\right..$$

При $a=3$ $\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=2 \end{array}\right.$. При $a=\dfrac{1}{3}$ $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ x=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$.

Ответ: уравнение $\left(3a^2-10a+3\right)^2+\left(3^{x^2+x}-243a\right)^2=0$ имеет решения при

1) $a=3$ $\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=2 \end{array}\right.$; 2) $a=\dfrac{1}{3}$ $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ x=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$.

11. Найдите все значения параметра b, при которых множество решений системы неравенств $\begin{cases} 81^{x-2}\leqslant 9^{8b+13} \\ 36^{x+2}\geqslant 6^{8b+15} \end{cases}$ симметрично относительно точки $x=1$.

$$\begin{cases} 2x-4\leqslant 8b+13 \\ 2x+4\geqslant 8b+15 \end{cases}; \quad \begin{cases} x\leqslant 4b+8{,}5 \\ x\geqslant 4b+5{,}5 \end{cases}.$$

Условие симметричности корней системы относительно $x = 1$ – это $\frac{x_1 + x_2}{2} = 1$,

значит $\frac{4b + 8{,}5 + 4b + 5{,}5}{2} = 1$; $4b + 7 = 1$; $b = -1{,}5$.

Ответ: при $b = -1{,}5$ множество решений системы неравенств $\begin{cases} 81^{x-2} \leqslant 9^{8b+13} \\ 36^{x+2} \geqslant 6^{8b+15} \end{cases}$ симметрично относительно точки $x = 1$.

12. При каких значениях параметра a уравнение $-2 \cdot 3^x = -2a \cdot 3^{3-x} + 3$ имеет единственное решение?

$-2 \cdot 3^x = -2a \cdot 3^{3-x} + 3$; $\quad 2 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^3 \cdot a \cdot 3^{-x} + 3 = 0$.

Пусть $3^x = t \quad (t > 0)$.

$2t^2 + 3t - 54a = 0$; $\quad t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 432a}}{4}$;

$D = 9 + 432a \geqslant 0$; $\quad a \geqslant -\frac{9}{432}$; $\quad a \geqslant -\frac{1}{48}$;

а) один из корней уравнения $t_1 < 0$ при любом значении параметра a, другой (t_2) может быть положительным.

Это возможно, если $-54a < 0$ (т.е. $a > 0$), тогда существует один положительный корень.

б) при $a = -\frac{1}{48}$ $\quad t_1 = t_2 = \frac{-3}{4} < 0$,

но по условию $3^x = t > 0$.

в) при $a < -\frac{1}{48}$ оба корня отрицательны.

Значит только при $a > 0$ есть единственный корень.

Ответ: при $a \in (0; \infty)$ имеется единственный корень уравнения $-2 \cdot 3^x = -2a \cdot 3^{3-x} + 3$.

13. Уравнение $36^x - (8a+5)\cdot 6^x + 16a^2 + 20a - 14 = 0$ имеет единственное решение. При каких значениях параметра a это возможно?

Пусть $6^x = t \quad (t > 0)$, тогда уравнение имеет вид

$t^2 - (8a+5)\, t + 16a^2 + 20a - 14 = 0$;

$D = (8a+5)^2 - 64a^2 - 80a + 56 =$

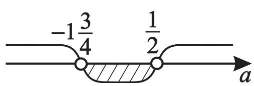
$= \underline{64a^2} + \underline{\underline{80a}} + 25 - \underline{64a^2} - \underline{\underline{80a}} + 56 = 81 > 0$ для $\forall a$.

Значит корни есть, но нам необходим только один положительный корень, что возможно, если

$16a^2 + 20a - 14 < 0$ или если $D = 0$ верно.

а) Пусть $16a^2 + 20a - 14 < 0$; $\quad 8a^2 + 10a - 7 = 0$;

$$a_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+56}}{8} = \frac{-5 \pm 9}{8}; \quad \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{1}{2} \\ a = -\dfrac{7}{4} \end{array}\right.,$$



т.е. при $a \in \left(-1\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$ существует один положительный корень.

б) $a = -1\dfrac{3}{4}$, тогда $t^2 + 9t = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -9 \end{array}\right. \notin (0; \infty)$.

в) Пусть $a = \dfrac{1}{2}$, тогда $t^2 - 9t = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 0 \notin (0; \infty) \\ t = 9 \in (0; \infty) \end{array}\right.$.

г) $D = 81 \neq 0$, значит такого случая нет.

Ответ: при $a \in \left(-1\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right]$ уравнение

$$36^x - (8a+5)\cdot 6^x + 16a^2 + 20a - 14 = 0$$

имеет единственное решение.

Тренировочная работа 7

1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $49^x-(8a-1)\cdot 7^x+16a^2-4a-2=0$ имеет только один корень.

2. Найдите все значения параметра a, при которых существует такое значение параметра b, что уравнение $\frac{4^x-a\cdot 2^x}{2^x-1}=b$ не имеет решения.

3. При каких значениях параметра a уравнение $\left(x^2-2x-3\right)\sqrt{5^{x^2-2x-3}+a^2+4a-33}=0$ имеет только два корня?

4. Решите уравнение $14^{25x^2-10x+2}=\cos 10\pi x-36a^2-60a-12$ и найдите все значения параметра a, при которых это возможно.

5. При каких значениях параметра a уравнение $a\cdot 2^x+2^{-x}=5$ имеет единственное решение?

6. При каких значениях параметра a решением неравенства $3^{a-|x|}>\frac{1}{3}$ является интервал $(-4;4)$?

7. При каких значениях параметра a уравнение $9^{\sin^2\pi x}+9^{\cos^2\pi x}=a$ имеет решение?

8. При каких значениях параметра a функция $y=\frac{2^{ax}-2^x}{a-1}$ является нечётной?

Решение тренировочной работы 7

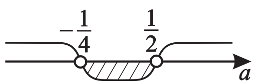
1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $49^x - (8a-1)\cdot 7^x + 16a^2 - 4a - 2 = 0$ имеет только один корень.

Пусть $7^x = t\ (t > 0)$, тогда уравнение примет вид $t^2 - (8a-1)\,t + 16a^2 - 4a - 2 = 0$.

а) $D = (8a-1)^2 - 64a^2 + 16a + 8 = 9 > 0$,
значит действительно корни всегда есть.

б) Если $16a^2 - 4a - 2 < 0$, то один корень положителен.

$$8a^2 - 2a - 1 < 0;\quad a_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{8} = \frac{1\pm 3}{8};\quad \left[\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \\ a &= -\frac{1}{4} \end{aligned}\right..$$



в) Пусть $a = -\frac{1}{4}$, тогда $t^2 + 3t = 0$; $\left[\begin{aligned} t &= 0 \\ t &= -3 \end{aligned}\right. \notin (0; \infty)$.

г) Пусть $a = \frac{1}{2}$, тогда $t^2 - 3t = 0$; $\left[\begin{aligned} t &= 0 \notin (0; \infty) \\ t &= 3 \in (0; \infty) \end{aligned}\right.$.

Ответ: при $a \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$ уравнение
$49^x - (8a-1)\cdot 7^x + 16a^2 - 4a - 2 = 0$ имеет только один корень.

2. Найдите все значения параметра a, при которых существует такое значение параметра b, что уравнение $\frac{4^x - a\cdot 2^x}{2^x - 1} = b$ не имеет решения.

$D(y): 2^x \neq 1$; $\frac{4^x - a\cdot 2^x}{2^x - 1} = b$; $4^x - a\cdot 2^x = b\cdot 2^x - b$.

Пусть $2^x = t\ \ (t > 0)$; $t^2 - (a+b)\,t + b = 0$.

а) Если $t < 0$, то уравнение не имеет решения.

Значит, чтобы было только два отрицательных корня, необходимо

$$\begin{cases} b > 0 \\ a + b < 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} b > 0 \\ b < -a \end{cases}; \quad -a > b > 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}.$$

б) Пусть $t = 1$, тогда уравнение $t^2 - (a + b)\,t + b = 0$ примет вид

$1 - (a + b)\cdot 1 + b = 0$; $\quad 1 - a = 0$; $\quad a = 1$.

Так как $t = 1 \notin D(y)$, то при $a = 1$ при любых b – решения нет.

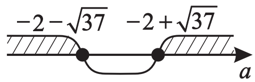
Ответ: 1) при $a < 0$ для $\forall b > 0$ уравнение $\dfrac{4^x - a\cdot 2^x}{2^x - 1} = b$ решения не имеет;

2) при $a = 1$ для $\forall b$ уравнение $\dfrac{4^x - a\cdot 2^x}{2^x - 1} = b$ решения не имеет.

3. При каких значениях параметра a уравнение $\left(x^2 - 2x - 3\right)\sqrt{5^{x^2-2x-3} + a^2 + 4a - 33} = 0$ имеет только два корня?

Так как $x^2 - 2x - 3 = 0$, когда $\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right.$, и уже есть два корня, то других корней нет, если

а) $a^2 + 4a - 33 \geqslant 0$; $a_{1,2} = -2 \pm \sqrt{37}$;



б) если $a^2 + 4a - 33 = -1$, тогда $5^{x^2-2x-3} = 1$;

$a^2 + 4a - 32 = 0$; $\left[\begin{array}{l} a = -8 \notin \left(-\infty; -2 - \sqrt{37}\right] \\ a = 4 \notin \left[-2 + \sqrt{37}; \infty\right) \end{array}\right.$ – значит это новые значения параметра a.

Ответ: при $a \in \left(-\infty; -2 - \sqrt{37}\right] \cup \left[-2 + \sqrt{37}; \infty\right) \cup \{-8; 4\}$

уравнение $\left(x^2 - 2x - 3\right)\sqrt{5^{x^2-2x-3} + a^2 + 4a - 33} = 0$ имеет только два корня.

4. Решите уравнение $14^{25x^2-10x+2} = \cos 10\pi x - 36a^2 - 60a - 12$ и найдите все значения параметра a, при которых это возможно.

Так как $25x^2 - 10x + 2 = (5x-1)^2 + 1$,

то $14^{25x^2-10x+2} = 14^{(5x-1)^2+1} \geqslant 14^1$,

тогда $\cos 10\pi x - 36a^2 - 60a - 12 \geqslant 14$,

значит $\cos 10\pi x \geqslant 36a^2 + 60a + 26 = (6a+5)^2 + 1$,

но $\cos 10\pi x \in [-1; 1]$. Отсюда следует, что $\cos 10\pi x = 1$,

но это возможно только при $a = -\dfrac{5}{6}$, что порождает

единственное решение $14^{(5x-1)^2+1} = 14$, где $x = \dfrac{1}{5}$,

но $\cos\left(10\pi \cdot \dfrac{1}{5}\right) = 1$ – корень совпадает.

Ответ: уравнение $14^{25x^2-10x+2} = \cos 10\pi x - 36a^2 - 60a - 12$ имеет решение $x = 0{,}2$ при $a = -\dfrac{5}{6}$, и оно единственное.

5. При каких значениях параметра a уравнение $a \cdot 2^x + 2^{-x} = 5$ имеет единственное решение?

Пусть $2^x = t \quad (t > 0)$,

тогда $a \cdot t + \dfrac{1}{t} = 5$; т.е. $at^2 - 5t + 1 = 0$.

Уравнение имеет единственное решение, если

а) $D = 0$; $D = 25 - 4a = 0$; $a = 6{,}25$;

б) один из корней положительный, а другой нет, но это возможно только если в данном случае $a < 0$;

в) $a = 0$, тогда $t = \dfrac{1}{5}$.

Ответ: при $a \in (-\infty; 0] \cup \{6{,}25\}$ уравнение $a \cdot 2^x + 2^{-x} = 5$ имеет единственное решение.

6. При каких значениях параметра a решением неравенства $3^{a-|x|} > \frac{1}{3}$ является интервал $(-4;\,4)$?

$3^{a-|x|} > \frac{1}{3}$; тогда $3^{a-|x|} > 3^{-1}$, значит $a - |x| > -1$.

Тогда $|x| < a+1$ по свойству неравенств с модулем равносильно $\begin{cases} x < a+1 \\ x > -(a+1) \end{cases}$, но тогда $a+1=4$, т.е. $a=3$.

Ответ: при $a=3$ решением неравенства $3^{a-|x|} > \frac{1}{3}$ является интервал $(-4;\,4)$.

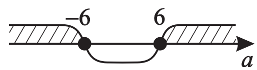
7. При каких значениях параметра a уравнение $9^{\sin^2 \pi x} + 9^{\cos^2 \pi x} = a$ имеет решение?

Пусть $9^{\sin^2 \pi x} = t \quad (t>0)$, тогда

$9^{\cos^2 \pi x} = 9^{1-\sin^2 \pi x} = 9 \cdot 9^{-\sin^2 \pi x} = \frac{9}{t}$.

Значит уравнение примет вид $t + \frac{9}{t} = a$; $\quad t^2 - at + 9 = 0$;

$D = a^2 - 36 = (a-6)(a+6)$.



Так как $t>0$, то $a>0$, значит подходят только значения $a \geqslant 6$.

Ответ: при $a \in [6;\,\infty)$ уравнение $9^{\sin^2 \pi x} + 9^{\cos^2 \pi x} = a$ имеет решение.

8. При каких значениях параметра a функция $y = \frac{2^{ax} - 2^x}{a-1}$ является нечетной?

Известно, что $y = f(x)$ называется нечётной, если выполняются следующие два условия:

а) $D(y)$ – область определения – симметричное относительно нуля множество;

б) для $\forall x \in D(y) \quad f(-x) = -f(x)$.

В данном случае

$D(y) = (-\infty; \infty)$ – симметричное множество.

$f(-x) = \frac{2^{-ax} - 2^{-x}}{a-1}$, тогда

$\frac{2^{-ax} - 2^{-x}}{a-1} = -\frac{2^{ax} - 2^{x}}{a-1}$ при $a \neq 1$;

$2^{-ax} - 2^{-x} = -2^{ax} + 2^{x}$;

$2^{ax} + 2^{-ax} = 2^{x} + 2^{-x}$, что верно при любом x,

если $\left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -1 \end{array}\right.$, но $a \neq 1$.

Ответ: при $a = -1$ функция $y = \frac{2^{ax} - 2^{x}}{a-1}$ является нечётной функцией.

8

Логарифмические уравнения и неравенства[1]

Практикум 8

1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$\log_{0,5}\left(ax^2-(a+1)\,x+6\right)=\log_{0,5}\left(3x^2-(a+1)\,x+2a\right)$

имеет более двух решений.

$ax^2-(a+1)\,x+6=3x^2-(a+1)\,x+2a$;

$(a-3)\,x^2+6-2a=0$; $\quad (a-3)\left(x^2-2\right)=0$.

При $a=3$ имеем бесконечное множество решений.

При $a=3$ $\quad ax^2-(a+1)\,x+6>0$. Действительно,

$3x^2-(3+1)\,x+2\cdot3>0$; $3x^2-4x+6>0$ для $\forall x$.

Ответ: при $a=3$ уравнение

$\log_{0,5}\left(ax^2-(a+1)x+6\right)=\log_{0,5}\left(3x^2-(a+1)x+2a\right)$

имеет более двух решений.

2. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $2+\log_2\left(x-3a-2\right)\leqslant\log_2\left(-x-7a+22\right)$ не имеет решений.

Попробуем вначале решить неравенство, тогда

$$\begin{cases} x>3a+2 \\ x<22-7a \\ 4\left(x-3a-2\right)\leqslant -x-7a+22 \end{cases};\quad \begin{cases} x>3a+2 \\ x<22-7a\,. \\ x\leqslant a+6 \end{cases}$$

---

[1]Подробнее см. Шахмейстер А. Х. Логарифмы. СПб.: «ЧеРо-на-Неве», 2005.

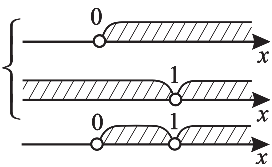
Тогда $\begin{cases} 22-7a>3a+2 \\ a+6>3a+2 \end{cases}$; $\begin{cases} a<2 \\ a<2 \end{cases}$; $a<2$.

Значит при $a \geqslant 2$ решений нет.

Ответ: при $a \geqslant 2$ неравенство
$2+\log_2\left(x-3a-2\right) \leqslant \log_2\left(-x-7a-22\right)$ не имеет решений.

3. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left(4x+2a-3\right)\left(x-2a+3\right)\log_4 x=0$ имеет только два различных корня.

Условие того, что $\log_4 x \neq 0$, изобразим графически.



Уравнение имеет следующие корни:

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3-2a}{4} \\ x=2a-3. \\ x=1 \end{array}\right.$$

Но нам необходимо, чтобы корней было только два. Это произойдёт в том случае, если значения двух корней совпадут (при этом находясь в области определения), либо один из первых двух корней выйдет за область определения. Рассмотрим эти случаи.

а) Случай $x_1=x_2$, где $x_1=\dfrac{3-2a}{4}$; $x_2=2a-3$;

$\dfrac{3-2a}{4}=2a-3$; $3-2a=8a-12$; $10a=15$; $a=1{,}5$;

Но при $a=1{,}5$ $x=\dfrac{3-3}{4}=0 \notin \left(0;\infty\right)$, т.е. это значение нам не подходит.

б) Рассмотрим случай $x_1=x_3$.

$x_1=\dfrac{3-2a}{4}$; $x_3=1$; $\dfrac{3-2a}{4}=1$; $3-2a=4$; $a=-\dfrac{1}{2}$,

тогда $x_2=-4 \notin \left(0;\infty\right)$, т.е. это значение нам не подходит.

в) Рассмотрим случай $x_2=x_3$.

$x_2=2a-3$; $x_3=1$; $2a-3=1$; $a=2$, тогда

$x_1=-\dfrac{1}{4} \notin \left(0;\infty\right)$, т.е. это значение нам также не подходит.

г) $x_1 \in D(y)$; $x_2 \notin D(y)$, где $x_1 = \frac{3-2a}{4}$; $x_2 = 2a-3$;

$\frac{3-2a}{4} > 0$; $2a-3<0$; $a<1{,}5$; $\frac{3-2a}{4} \neq 1$; $a \neq -\frac{1}{2}$,

т.е. $x_1 = \frac{3-2a}{4} \in (0;\infty)$ и $x_2 = 2a-3 \notin (0;\infty)$ при $a<1{,}5$.

Таким образом, при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 1{,}5\right)$ существуют два различных корня.

д) $x_1 \notin D(y)$; $x_2 \in D(y)$, где $x_1 = \frac{3-2a}{4}$; $x_2 = 2a-3$.

$2a-3>0$; $a>1{,}5$; $2a-3 \neq 1$; $a \neq 2$, т.е.

$x_2 = 2a-3 \in (0;\infty)$; $x_1 = \frac{3-2a}{4} \notin (0;\infty)$ при $a>1{,}5$.

Значит при $a \in (1{,}5;2) \cup (2;\infty)$ существуют также два различных корня.

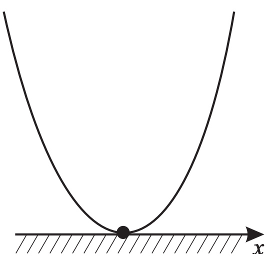
Ответ: при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 1{,}5\right) \cup (1{,}5;2) \cup (2;\infty)$ уравнение $(4x+2a-3)(x-2a+3)\log_4 x = 0$ имеет только два различных корня.

4. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $a\log_4^2 x - (2a+3)\log_4 x + 6 \leqslant 0$ имеет единственное решение.

Пусть $\log_4 x = t$, тогда неравенство примет вид $at^2 - (2a+3)t + 6 \leqslant 0$.

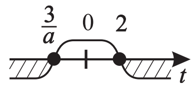
а) $a>0$; $D = (2a+3)^2 - 24a = (2a-3)^2$; тогда $\left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=\frac{3}{a} \end{array}\right.$.

При $a=1{,}5$ $D=0$



б) $a = 0$; $\log_4 x \geqslant 2$; $x \geqslant 16$ – единственного решения нет.

в) $a < 0$ – единственного решения нет.

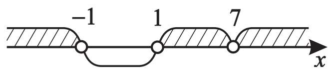


Ответ: при $a \in \{1,5\}$ неравенство $a\log_4^2 x - (2a+3)\log_4 x + 6 \leqslant 0$ имеет единственное решение.

5. При каком значении параметра a уравнение

$\log_2 \frac{(x-7)^2}{(x-1)(x+1)} = \log_2 2^a$ имеет единственный корень?

$D(y)$: $\frac{(x-7)^2}{(x-1)(x+1)} > 0$;



$\log_2 \frac{(x-7)^2}{(x-1)(x+1)} = \log_2 2^a$; $\quad x^2 - 14x + 49 = \left(x^2 - 1\right)2^a$;

$\left(1 - 2^a\right)x^2 - 14x + 49 + 2^a = 0$;

а) $1 - 2^a = 0$; $\quad a = 0$ – $\exists$ единственное решение

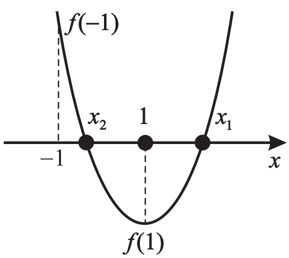
$x = \frac{50}{14} = \frac{25}{7} = 3\frac{4}{7} > 1$; $\quad x \in D(y)$;

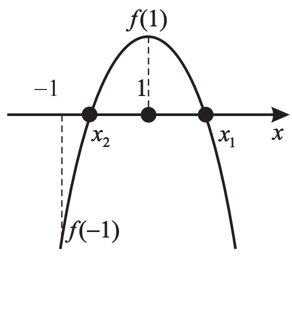
б) $D = 7^2 - \left(49 + 2^a\right)\left(1 - 2^a\right) = \underline{49} - \underline{49} - 2^a + 2^{2a} + 49 \cdot 2^a =$
$= 2^{2a} + 48 \cdot 2^a > 0$, значит два корня есть всегда.

Необходимо выяснить условия, при которых один корень принадлежал бы $D(y)$, а другой нет.

Это возможно, если

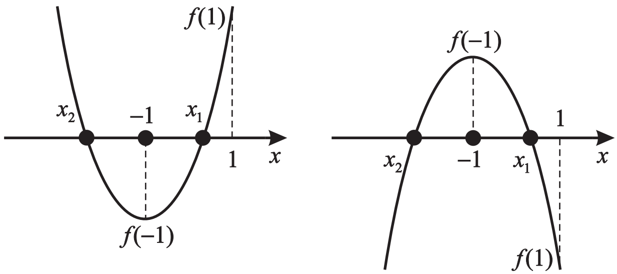
а) $\begin{cases} x_1 \in (1;\, 7) \cup (7;\, \infty) \\ x_2 \in (-1;\, 1) \end{cases}$.





Тогда, если $f(x) = (1-2^a)x^2 - 14x + 49 + 2^a$, то чтобы условие выполнялось, необходимо $f(1)\cdot f(-1) < 0$, значит $\left((1-2^a)-14\cdot 1+49+2^a\right)\left((1-2^a)+14+49+2^a\right)<0$, т.е. $36\cdot 64 < 0$ – ложь.

б) $\begin{cases} x_1 \in (-1; 1) \\ x_2 \in (-\infty; -1) \end{cases}$,



тогда $f(1)\cdot f(-1) < 0$, но это ложь.

Ответ: при $a = 0$ уравнение $\log_2 \frac{(x-7)^2}{(x-1)(x+1)} = \log_2 2^a$ имеет единственный корень.

6. Выясните, при каких значениях параметра a неравенство $\log_2^3 x - 3\log_2^2 x < a\log_2 x$ выполняется для $\forall x \in \left[2; 4\sqrt{2}\right]$.

$\log_2^3 x - 3\log_2^2 x < a\log_2 x$.

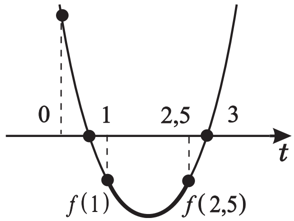
Пусть $\log_2 x = t$.

$\log_2 x\left(\log_2^2 x - 3\log_2 x - a\right) < 0$;

$t\left(t^2 - 3t - a\right) < 0$;

$t > 0$ для $x \in \left[2; 4\sqrt{2}\right]$. В силу непрерывности $t(x) = \log_2 x$ и строгого возрастания $1 \leqslant t \leqslant 2{,}5$, так как $\log_2 2 = 1$, $\log_2 4\sqrt{2} = 2{,}5$.

Тогда $t^2 - 3t < a$, т.е.



$$\begin{cases} 1^2 - 3\cdot 1 < a \\ \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 3\cdot 2{,}5 < a \end{cases}; \quad \begin{cases} a > -2 \\ a > -\frac{5}{4} \end{cases}. \quad \text{Значит } a > -\frac{5}{4}.$$

Ответ: при $a > -\frac{5}{4}$ неравенство $\log_2^3 x - 3\log_2^2 x < a\log_2 x$ выполняется для $\forall x \in \left[2; 4\sqrt{2}\right]$.

7. Уравнение $\log_2 x \log_2 4x = \log_2 ax \log_2 4ax$ имеет только два корня. При каких значениях параметра a это возможно?

$D(y)$: $\begin{cases} x > 0 \\ a > 0 \end{cases}$;

$\log_2 x \log_2 4x = \log_2 ax \log_2 4ax$;

$\log_2 x\left(2 + \log_2 x\right) = \left(\log_2 a + \log_2 x\right)\left(\log_2 a + 2 + \log_2 x\right)$.

Пусть $\log_2 x = t$. $\log_2 a = k$;

$t\left(2 + t\right) - \left(k + t\right)\left(k + 2 + t\right) = 0$;

$2t + t^2 - k^2 - 2k - kt - tk - 2t - t^2 = 0$;

$k^2 + 2k + 2kt = 0$; $k\cdot\left(k + 2 + 2t\right) = 0$;

а) $k \neq 0$ – существует один корень $t = -\frac{2+k}{2}$;

б) $k = 0$ – бесконечное множество решений, т.е. $a = 1$.

Ответ: такого значения параметра a нет, чтобы уравнение $\log_2 x \log_2 4x = \log_2 ax \log_2 4ax$ имело только два решения.

8. При каких значениях параметра k уравнение $\log_2\left(4^x-12\right)=k+x$ разрешимо?

$\log_2\left(4^x-12\right)=k+x$;

$\log_2\left(4^x-12\right)=\log_2 2^{k+x}$;

$4^x-12=2^{k+x} \qquad \left(2^{k+1}=2^k\cdot 2^x\right).$

Пусть $2^x=t \quad (t>0)$.

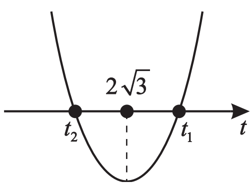
$t^2-2^k\cdot t-12=0$;

$D=\left(2^k\right)^2+4\cdot 12>0 \quad \forall k$;

Так как по теореме Виета $\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1\cdot x_2=q \end{cases}$, то $\begin{cases} q=-12<0 \\ -p=2^k>0 \end{cases}$.

Значит больший корень t_1 положителен.

Учитывая $D(y)$ $\quad t^2-12>0$ и $t>0$ по определению, получим $t>2\sqrt{3}$.



Для выполнения этого условия необходимо

$f\left(2\sqrt{3}\right)<0$, тогда $t_1>2\sqrt{3}$; ($f(t)=t^2-2^k t-12$)

$\left(2\sqrt{3}\right)^2-2^k\cdot 2\sqrt{3}-12<0$;

$12-2^k\cdot 2\sqrt{3}-12<0$;

$-2^k\cdot 2\sqrt{3}<0$ для $\forall k$.

Ответ: при $\forall k$ существует единственный корень уравнения $\log_2\left(4^x-12\right)=k+x$, т.е. уравнение разрешимо.

9. При каких значениях параметра k уравнение $\log_2(x+10)-\log_2(x+6)=\log_2(k-x)$ имеет только два решения?

$\log_2(x+10)-\log_2(x+6)=\log_2(k-x)$;

$D(y)$: $\begin{cases} k-x>0 \\ x+6>0 \end{cases}$, т.е. $-6<x<k$.

Тогда уравнение примет вид $\frac{x+10}{x+6}=k-x$.

Попробуем решить задачу графически.

Пусть $y(x)=\frac{x+10}{x+6}=1+\frac{4}{x+6}$;

$g(x)=k-x$.

График $y(x)$ – гипербола; график $g(x)$ – прямая.

Решение будет единственным, если $g(x)$ – касательная, или с позиций решения уравнения, в данном случае квадратного, когда $D=0$.

$x+10=-x^2-6x+6k+kx$;

$x^2-(k-7)x+10-6k=0$;

$D=(k-7)^2-40+24k=k^2+10k+9$;

$D=0$;

$\left[\begin{array}{l} k=-1 \\ k=-9 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} y=-x-1 \\ y=-x-9 \end{array}\right.$.

Так как $D=0$, то $x_1=x_2=\frac{k-7}{2}$.

При $k=-1$, $k=-9$ получим $\left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=-8 \end{array}\right.$ (точки касания).

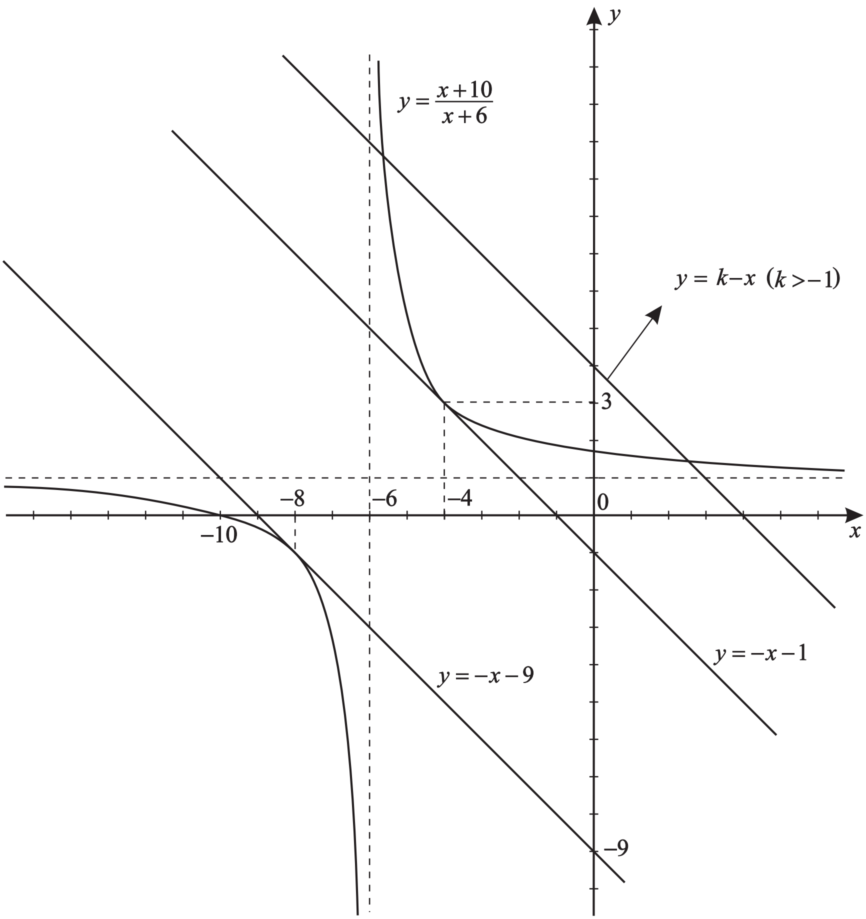
Касательная в точке $x=-8\notin(-6;\infty)$ не подходит, поэтому годится только касательная в точке $x=-4$.

Так как $-6 < x < k$, то по графику видно, что при

а) $k = -1$ $\exists$ один корень $\left(y = -x - 1\right)$;

б) $k > -1$ $\exists$ два корня;

в) $k \in \left(-6; -1\right)$ корней нет.



Ответ: при $k > -1$ уравнение
$\log_2\left(x + 10\right) - \log_2\left(x + 6\right) = \log_2\left(k - x\right)$ имеет
только два решения.

10. При каких значениях параметра a уравнение $\ln\left(e^x + 3e^{-x}\right) = a$ имеет только два корня?

$\ln\left(e^x + 3e^{-x}\right) = a$; $e^x + 3e^{-x} - e^a = 0$; $e^x = t$;

$t^2 - e^a t + 3 = 0$; $\begin{cases} t_1 + t_2 = -p \\ t_1 \cdot t_2 = q \end{cases}$; $D = e^{2a} - 12 > 0$;

$$\left[\begin{array}{ll} e^a > \sqrt{12} & a > \ln 2\sqrt{3} \\ e^a < -\sqrt{12} & \varnothing \end{array}\right. .$$

Так как $\begin{cases} t_1 \cdot t_2 = 3 \\ t_1 + t_2 = e^a \end{cases}$, оба корня положительные.

Значит в данном случае при $D > 0$ всегда есть два положительных корня.

Ответ: при $a \in \left(\ln 2\sqrt{3}; \infty\right)$ уравнение $\ln\left(e^x + 3e^{-x}\right) = a$ имеет только два корня.

11. Сколько корней имеет уравнение $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x+5}{3-x} = \log_{\frac{1}{2}} ax$ в зависимости от значения параметра a?

$\frac{x+5}{3-x} = ax$, где $ax > 0$; $\begin{cases} a > 0 \\ 0 < x < 3 \end{cases}$ или $\begin{cases} a < 0 \\ -5 < x < 0 \end{cases}$;

$ax^2 - \left(3a - 1\right) x + 5 = 0$.

а) $\begin{cases} a \neq 0 \\ D = \left(3a - 1\right)^2 - 20a = 9a^2 - 26a + 1 \end{cases}$; $\begin{cases} a \neq 0 \\ D = 0 \end{cases}$;

$$\left[\begin{array}{l} a = \frac{13+\sqrt{160}}{9} \\ a = \frac{13-\sqrt{160}}{9} \end{array}\right. .$$

Отметим, что $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$, т.е. $x \in \left(0; 3\right)$.

Вычислим, какой из корней принадлежит $(0; 3)$.

$$x_1 = x_2 = \frac{3a-1}{2a}; \quad a_1 = \frac{13+\sqrt{160}}{9};$$

$$x_1 = \frac{3\cdot\frac{13+\sqrt{160}}{9}-1}{2\cdot\frac{13+\sqrt{160}}{9}} = \frac{3\cdot\left(13+4\sqrt{10}\right)-9}{26+8\sqrt{10}} = \frac{3\cdot\left(10+4\sqrt{10}\right)}{26+8\sqrt{10}} = \frac{3\cdot\left(5+2\sqrt{10}\right)}{13+4\sqrt{10}};$$

$x_1 \in (0; 3)$ (так как $0 < \dfrac{5+2\sqrt{10}}{13+4\sqrt{10}} < 1$);

$$a_2 = \frac{13-\sqrt{160}}{9};$$

$$x_2 = \frac{\frac{3\cdot\left(13-4\sqrt{10}\right)}{9}-1}{2\cdot\frac{13-4\sqrt{10}}{9}} = \frac{3\left(13-4\sqrt{10}-3\right)}{2\left(13-4\sqrt{10}\right)} = \frac{3\left(10-4\sqrt{10}\right)}{2\left(13-4\sqrt{10}\right)} < 0;$$

$x_2 \notin (0; 3)$.

б) $a = 0$ – уравнение не определено.

в) Далее к исследованию привлечём графические соображения.

$\varphi(x) = \dfrac{x+5}{3-x} = -1 + \dfrac{8}{3-x}$.

Это гипербола вида $y = -\dfrac{1}{x}$, сдвинутая вправо на 3 единицы и опущенная на единицу вниз.

Значит, если $a = \dfrac{13+4\sqrt{10}}{9}$,

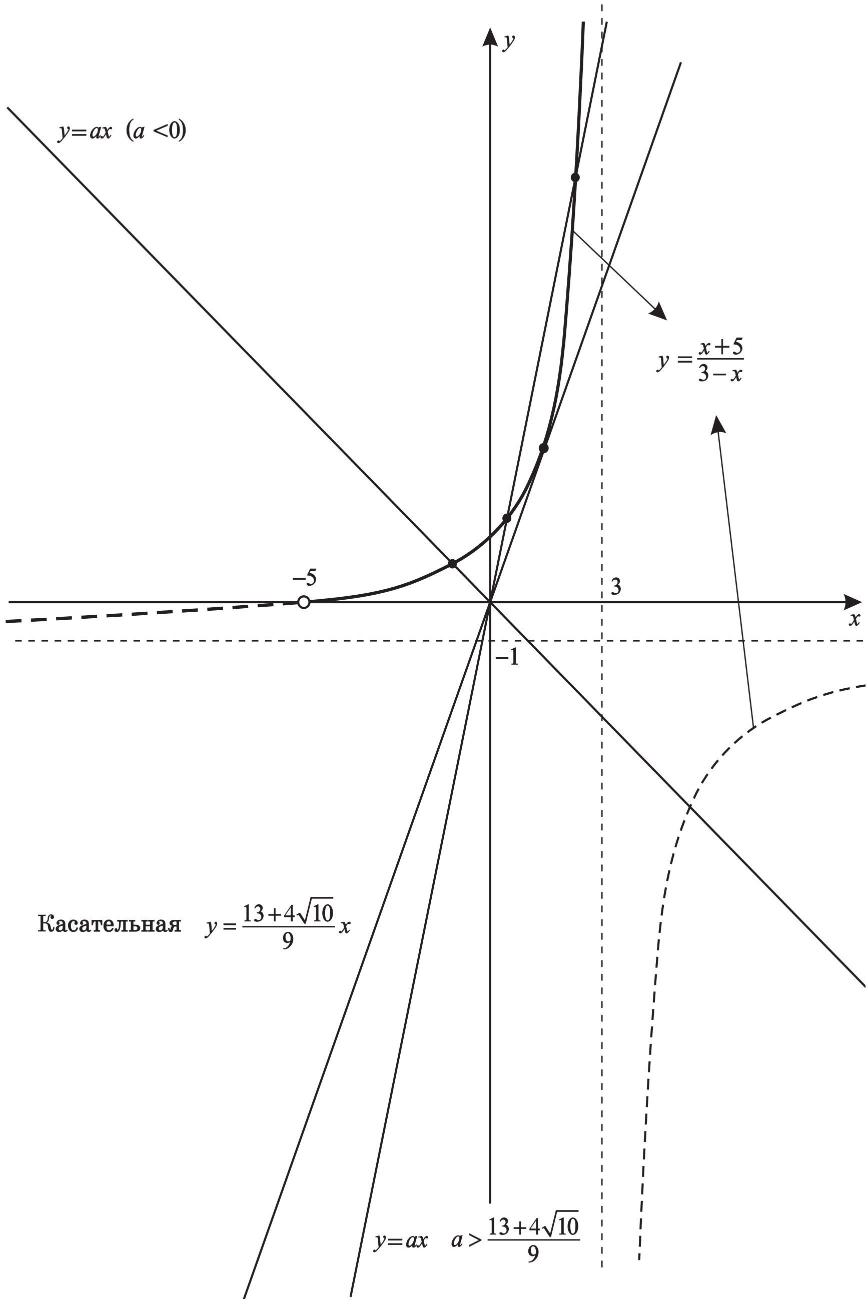
то $y = \dfrac{13+4\sqrt{10}}{9}x$ – касательная к $\varphi(x) = \dfrac{x+5}{3-x}$.

Если $a > \dfrac{13+4\sqrt{10}}{9}$, то прямая $y = ax$ пересекает

$\varphi(x) = \dfrac{x+5}{3-x}$ в двух точках.

г) При $a < 0$ – прямая $y = ax$ на $(-5; 0)$ пересекает

$\varphi(x) = \dfrac{x+5}{3-x}$ только в одной точке.


y
y=ax (a <0)
y = (x+5)/(3−x)
−5
3
x
−1
Касательная y = (13+4√10)/9 x
y=ax a > (13+4√10)/9

Ответ: уравнение $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x+5}{3-x} = \log_{\frac{1}{2}} ax$ имеет

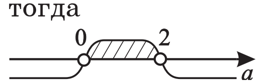
1) при $a > \frac{13+4\sqrt{10}}{9}$ два корня;
2) при $a = \frac{13+4\sqrt{10}}{9}$ один корень;
3) при $0 < a < \frac{13+4\sqrt{10}}{9}$ корней нет;
4) при $a = 0$ уравнение не определено;
5) при $a < 0$ один корень.

12. При каких значениях параметра a неравенство $(\cos x)^{\log_3 \cos x - |a|} > 3^{\log_9 (1-\sin^2 x)+a(a-2)}$ справедливо для любых x из области определения?

$D(\text{Н})^1$: $\cos x > 0$; $(\cos x)^{\log_3 \cos x - |a|} > 3^{\log_9 (1-\sin^2 x)+a(a-2)}$;
$\log_9 (1 - \sin^2 x) = \log_9 \cos^2 x = \log_3 |\cos x|$,
но $\cos x > 0$, тогда $\log_9 (1 - \sin^2 x) = \log_3 \cos x$;
$(\cos x)^{\log_3 \cos x - |a|} > 3^{\log_3 \cos x + a(a-2)}$.

а) Прологарифмируем обе части неравенства по основанию три; так как $y = \log_3 x$ – возрастающая, то знак неравенства не изменится.
$\log_3 (\cos x)^{\log_3 \cos x - |a|} > \log_3 3^{\log_3 \cos x + a(a-2)}$,
тогда $(\log_3 \cos x - |a|) \log_3 \cos x > \log_3 \cos x + a(a-2)$.

б) Пусть $\log_3 \cos x = t$. Следовательно тогда, так как $t = \log_3 \cos x$ и $0 < \cos x \leqslant 1$, то $t \leqslant 0$ (в силу монотонности и непрерывности $t = \log_3 x$).
Для $t^2 - (|a|+1)t - a^2 + 2a > 0$ это верно для $\forall t \leqslant 0$, если $-a^2 + 2a > 0$ ($|a|+1 > 0$ всегда, тогда $-(|a|+1)t \geqslant 0$ при любых $t \leqslant 0$).



Ответ: неравенство $(\cos x)^{\log_3 \cos x - |a|} > 3^{\log_9 (1-\sin^2 x)+a(a-2)}$ справедливо для любых x из области определения, если $a \in (0; 2)$.

[1] $D(\text{Н})$ – область определения неравенства.

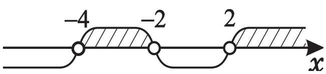
13. Сколько корней имеет уравнение $2^{-\log_{\frac{1}{2}}\log_6\frac{x^2+x}{x+4}} = \log_6 a$ в зависимости от значения параметра a?

Уравнение $2^{-\log_{\frac{1}{2}}\log_6\frac{x^2+x}{x+4}} = \log_6 a$ с учетом основного логарифмического тождества равносильно

$$\begin{cases} \log_6 \dfrac{x^2+x}{x+4} = \log_6 a \\ \log_6 \dfrac{x^2+x}{x+4} > 0 \end{cases}.$$

Это значит $\begin{cases} \dfrac{x^2+x}{x+4} = a \\ \dfrac{x^2+x}{x+4} > 1 \end{cases}$,

тогда $(a > 1)$ $\quad \dfrac{x^2+x}{x+4} > 1$; $\dfrac{(x+2)(x-2)}{x+4} > 0$.



Значит $D(y) = (-4; -2) \cup (2; \infty)$.

Итак, уравнение имеет вид

$x^2 + x = a(x+4)$, где $a > 1$;

$x^2 + (1-a)x - 4a = 0 \quad \left(f(x) = x^2 + (1-a)x - 4a\right)$;

$D = (1-a)^2 + 16a = a^2 + 14a + 1$.

Так как $a > 1$, то $D > 0$, т.е. всегда существуют два корня, и проверять принадлежность корней $D(y)$ не надо.

Ответ: при любых $a > 1$ уравнение имеет два корня; при $a \leqslant 1$ корней нет.

14. При каких значениях параметра a неравенство

$\left(1-|x|\right)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|} > 0{,}2^{4-a^2-\log_{25}\left(1+x^2-2|x|\right)}$ верно

для $\forall x \in D\left(y\right)$?

$D\left(H\right)$: $1-|x|>0$.

Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 5. Так как $y=\log_5 x$ – возрастающая, значит знак неравенства не изменится.

$\log_5\left(1-|x|\right)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|} > \log_5 0{,}2^{4-a^2-\log_{25}\left(1+x^2-2|x|\right)}$,

тогда $\log_5\left(1-|x|\right)\left(\log_5\left(1-|x|\right)-|a-1|\right)>$

$>\log_5 0{,}2\cdot\left(4-a^2-\log_{25}\left(1+x^2-2|x|\right)\right)$.

Так как $\log_{25}\left(1-|x|\right)^2=\log_5\left|\left(1-|x|\right)\right|$,

но $1-|x|>0$ по $D\left(H\right)$, то $\log_{25}\left(1-|x|\right)^2=\log_5\left(1-|x|\right)$.

Обозначим $\log_5\left(1-|x|\right)=t$,

значит $t\left(t-|a-1|\right)>\left(-1\right)\left(4-a^2-t\right)$,

тогда $t^2-\left(|a-1|+1\right)t+4-a^2>0$.

Рассмотрим $E\left(t\right)$ – область изменения функции $t=\log_5\left(1-|x|\right)$.

Так как $1\geqslant 1-|x|>0$, то $t\leqslant 0$; $E\left(t\right)=\left(-\infty;0\right]$.

Значит $t^2-\left(|a-1|+1\right)t+4-a^2>0$ возможно всегда, если $4-a^2>0$, так как $-\left(|a-1|+1\right)t\geqslant 0$ при любом $t\leqslant 0$, т.е. $a\in\left(-2;2\right)$.

Ответ: при $a\in\left(-2;2\right)$ неравенство

$\left(1-|x|\right)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|} > 0{,}2^{4-a^2-\log_{25}\left(1+x^2-2|x|\right)}$ верно

для $\forall x \in D\left(y\right)$.

15. При каких значениях параметра a неравенство

$\log_a \frac{4+3|x|}{1+|x|} + \log_a \frac{6+5|x|}{1+|x|} > 1$ справедливо для любых x?

Так как $\frac{4+3|x|}{1+|x|} > 0$ и $\frac{6+5|x|}{1+|x|} > 0$ при $\forall x$, то

$\log_a \frac{4+3|x|}{1+|x|} + \log_a \frac{6+5|x|}{1+x} = \log_a \left(\frac{4+3|x|}{1+|x|} \cdot \frac{6+5|x|}{1+|x|}\right)$,

тогда $\log_a \left(\frac{4+3|x|}{1+|x|} \cdot \frac{6+5|x|}{1+|x|}\right) > \log_a a$.

а) Пусть $a > 1$, тогда, учитывая,

что $y = \log_a x$ – возрастающая, $\frac{4+3|x|}{1+|x|} \cdot \frac{6+5|x|}{1+|x|} > a$.

Выделим целую часть для каждой дроби и получим

$\frac{4+3|x|}{1+|x|} = 3 + \frac{1}{1+|x|}$; $\frac{6+5|x|}{1+|x|} = 5 + \frac{1}{1+|x|}$.

Положим $\frac{1}{1+|x|} = t$, тогда

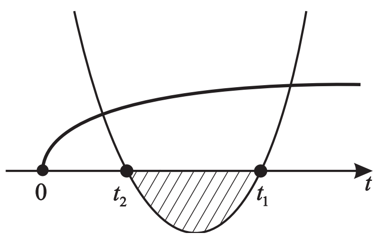
$(5+t)(3+t) > a$; $\quad t^2 + 8t + 15 - a > 0$.

Так как $t > 0$, то это возможно для любых $t > 0$, если $15 - a > 0$; т.е. при $a < 15$, учитывая условия возрастания, $1 < a < 15$.

б) $0 < a < 1$, тогда $t^2 + 8t + 15 - a < 0$, что возможно

не для всех положительных t, даже если $D > 0$.

По условию этот случай не подходит.



Ответ: неравенство $\log_a \frac{4+3|x|}{1+|x|} + \log_a \frac{6+5|x|}{1+|x|} > 1$

справедливо для любых x при $1 < a < 15$.

Тренировочная работа 8

1. При любом значении параметра a решите уравнение $\left(\lg^2 x - 4a \lg x + 3a^2\right)^2 + \left(a^2 - a - 6\right)^2 = 0$.

2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $4 \log_7 \sin x + a \log_7 \sin x - a^2 + 4a + 5 = 0$ имеет хотя бы одно решение.

3. Найдите все значения параметра a, при которых число $x = 14$ является решением неравенства $(x-14)(x-26)\sqrt{a^2 - 24a \log_{13}(x-13) - 25} \geqslant 0$, а число $x = 26$ не является решением этого неравенства.

4. Найдите все значения параметра a, при которых прямая $y = a$ пересекает график функции $f(x) = \dfrac{13 \log_{12}\left(10x^2+1\right)+15}{1-3 \log_{12}\left(10x^2+1\right)}$ хотя бы в одной точке.

5. Найдите все значения параметра a, при которых только одно из чисел $x = 6$ или $x = 7$ является решением неравенства $\left(x^2 - 13x + 42\right) \log_3 \left(10 + a^2 (x-6) - 7a (x-6)^2\right) \leqslant 0$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\log_4^2 x - (6a + 23) \log_4 x + 9a^2 + 69a + 132 = 0$ имеет два различных корня, равноудалённых от точки $x = 40$.

7. Найдите все значения параметра b, при которых уравнение $\log_3 \dfrac{3}{14x^2+3} = x^2 + (5b-1)^2$ имеет хотя бы одно решение. Найдите эти решения.

8. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $\left(2x^2 - (a+4)x + 2a\right) \log_2 \dfrac{|x|}{2} \leqslant 0$ имеет только два решения.

9. Уравнение $2\lg(x+3)=\lg(ax+8)$ имеет единственный корень. Найдите все значения параметра a, для которых это возможно.

10. При каких значениях параметра a уравнение $2\lg(x-5)=\lg(ax-11)$ имеет только два корня?

11. При каких значениях параметра a неравенство $\log_{\frac{2a-15}{5}}\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x+a-5}{5}>0$ справедливо для любых x области определения $D(H)$?

12. При каких значениях параметра a неравенство $\log_a\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)+\log_a\left(\sqrt{1-x^2}+7\right)<1$ справедливо для любых $x\in D(H)$?

13. При каких значениях параметра a неравенство $(\sin x)^{\lg\sin x-a^2}>10^{\log_{100}\left(1-\cos^2 x\right)+\log_7 a}$ справедливо для любых $x\in D(H)$?

14. При каких значениях параметра a уравнение $\log_{0,25}\frac{30+\sqrt{4+\log_4^2 x}}{2}=a$ имеет решение?

15. При каких значениях параметра a уравнение $\log_a\left(\cos^2 x+1\right)+\log_a\left(\cos^2 x+5\right)=1$ имеет решение?

16. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases}2^x+y=a+4\\ x+\log_2 y=4\end{cases}$ имеет решение.

Решение тренировочной работы 8

1. При любом значении параметра a решите уравнение

$$\left(\lg^2 x - 4a\lg x + 3a^2\right)^2 + \left(a^2 - a - 6\right)^2 = 0.$$

Данное уравнение будет иметь решение в том и только в том случае, когда оба слагаемых будут равны нулю, так как они оба неотрицательные.

$$\begin{cases} a^2 - a - 6 = 0 \\ \lg^2 x - 4a\lg x + 3a^2 = 0 \end{cases};$$

а) $\begin{cases} a = 3 \\ \lg^2 x - 12\lg x + 27 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} a = 3 \\ \left[\begin{array}{l} \lg x = 9 \\ \lg x = -3 \end{array}\right. \end{cases}$; $\begin{cases} a = 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = 10^9 \\ x = 10^{-3} \end{array}\right. \end{cases}$;

б) $\begin{cases} a = -2 \\ \lg^2 x + 8\lg x + 12 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} a = -2 \\ \left[\begin{array}{l} \lg x = -6 \\ \lg = -2 \end{array}\right. \end{cases}$; $\begin{cases} a = -2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 10^{-6} \\ x = 10^{-2} \end{array}\right. \end{cases}$.

Ответ: уравнение $\left(\lg^2 x - 4a\lg x + 3a^2\right)^2 + \left(a^2 - a - 6\right)^2 = 0$

1) при $a = 3$ имеет корни $\left\{10^9; 10^{-3}\right\}$;

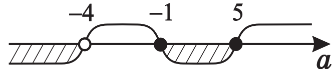
2) при $a = -2$ имеет корни $\left\{10^{-6}; 10^{-2}\right\}$;

3) при $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 3) \cup (3; \infty)$ корней нет.

2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $4\log_7 \sin x + a\log_7 \sin x - a^2 + 4a + 5 = 0$ имеет хотя бы один корень.

$(4 + a)\log_7 \sin x = a^2 - 4a - 5$;

$\log_7 \sin x \leqslant 0$, тогда $\dfrac{a^2 - 4a - 5}{a + 4} \leqslant 0$.



Ответ: при $a \in (-\infty; -4) \cup [-1; 5]$ уравнение

$4\log_7 \sin x + a\log_7 \sin x - a^2 + 4a + 5 = 0$ имеет хотя бы один корень.

3. Найдите все значения параметра a, при которых число $x = 14$ является решением неравенства
$(x-14)(x-26)\sqrt{a^2-24a\log_{13}(x-13)-25} \geqslant 0$, а число $x = 26$ не является решением этого неравенства.

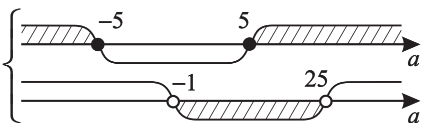
Неравенство равносильно

$$\begin{cases} a^2-24a\log_{13}(x-13)-25 \geqslant 0 \\ (x-14)(x-26)\left(a^2-24a\log_{13}(x-13)-25\right)^2 \geqslant 0 \end{cases}.$$

Пусть $f(x) = a^2-24a\log_{13}(x-13)-25$;

$$\begin{cases} f(14) \geqslant 0 \\ f(26) < 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} a^2-24a\cdot 0-25 \geqslant 0 \\ a^2-24a\log_{13}13-25 < 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a^2-25 \geqslant 0 \\ a^2-24a-25 < 0 \end{cases};$$



$a \in [5; 25)$.

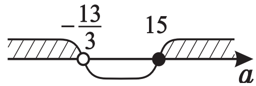
Ответ: при $a \in [5; 25)$ число $x = 14$ является решением неравенства
$(x-14)(x-26)\sqrt{a^2-24a\log_{13}(x-13)-25} \geqslant 0$,
а число $x = 26$ не является решением этого неравенства.

4. Найдите все значения параметра a, при которых прямая $y = a$ пересекает график функции
$f(x) = \dfrac{13\log_{12}\left(10x^2+1\right)+15}{1-3\log_{12}\left(10x^2+1\right)}$ хотя бы в одной точке.

$f(x) = a$, тогда $13\log_{12}\left(10x^2+1\right)+15 = a-3a\log_{12}\left(10x^2+1\right)$;

$(13+3a)\log_{12}\left(10x^2+1\right) = a-15$; $\quad \left(\log_{12}\left(10x^2+1\right) \geqslant 0\right)$

$\log_{12}\left(10x^2+1\right) = \dfrac{a-15}{13+3a}$, тогда $\frac{a-15}{13+3a} \geqslant 0$.



Ответ: при $a \in \left(-\infty; -4\frac{1}{3}\right) \cup [15; \infty)$ прямая $y = a$ пересекает график функции

$$f(x) = \frac{13\log_{12}\left(10x^2+1\right)+15}{1-3\log_{12}\left(10x^2+1\right)}$$ хотя бы в одной точке.

5. Найдите все значения параметра a, при которых только одно из чисел $x = 6$ или $x = 7$ является решением неравенства

$$\left(x^2 - 13x + 42\right)\log_3\left(10 + a^2(x-6) - 7a(x-6)^2\right) \leqslant 0.$$

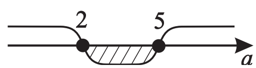
$$(x-6)(x-7)\log_3\left(10 + a^2(x-6) - 7a(x-6)^2\right) \leqslant 0.$$

а) $x = 6$; $0 \cdot \log_3 10 \leqslant 0$; $x = 6$ – решение.

б) $x = 7$; $0 \cdot \log_3\left(10 + a^2 - 7a\right) \leqslant 0$ – решения нет, если

$\log_3\left(a^2 - 7a + 10\right)$ не определен,

т.е. при $a^2 - 7a + 10 \leqslant 0$.



При $a \in [2; 5]$ $x = 7$ не является решением.

Ответ: при $a \in [2; 5]$ только $x = 6$ – решение неравенства

$$\left(x^2 - 13x + 42\right)\log_3\left(10 + a^2(x-6) - 7a(x-6)^2\right) \leqslant 0.$$

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\log_4^2 x - (6a + 23)\log_4 x + 9a^2 + 69a + 132 = 0$ имеет два различных корня, равноудалённых от точки $x = 40$.

Пусть $\log_4 x = t$, тогда

$t^2 - (6a + 23)t + 9a^2 + 69a + 132 = 0$;

$$D = (6a+23)^2 - 36a^2 - 276a - 528 =$$
$$= 36a^2 + 276a + 529 - 36a^2 - 276a - 528 = 1 > 0,$$

т.е. всегда существуют два корня.

$x_1 + x_2 = 6a + 23$, тогда $\frac{x_1+x_2}{2} = 40$,

т.е. $6a + 23 = 80$; $6a = 57$; $a = 9{,}5$.

Ответ: при $a = 9{,}5$ уравнение $\log_4^2 x - (6a+23)\log_4 x + 9a^2 + 69a + 132 = 0$ имеет два различных корня, равноудалённых от точки $x = 40$.

Примечание. Для $y = ax^2 + bx + c$ точка $x = x_0$ (абсцисса вершины параболы) есть точка оси симметрии; тогда $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$, где x_1; x_2 – корни квадратного трёхчлена.

7. Найдите все значения параметра b, при которых уравнение $\log_3 \frac{3}{14x^2+3} = x^2 + (5b-1)^2$ имеет хотя бы один корень. Найдите эти корни.

$\log_3 \frac{3}{14x^2+3} \leqslant 0$, так как $\frac{3}{14x^2+3} \leqslant 1$,

т.е. $x^2 + (5b-1)^2 \leqslant 0$.

Это возможно только при $\begin{cases} x = 0 \\ b = \frac{1}{5} \end{cases}$.

Ответ: при $b = 0{,}2$ уравнение $\log_3 \frac{3}{14x^2+3} = x^2 + (5b-1)^2$ имеет корень $x = 0$.

8. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $\left(2x^2 - (a+4)x + 2a\right)\log_2 \frac{|x|}{2} \leqslant 0$ имеет только два решения.

$2x^2 - (a+4)x + 2a = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{a+4 \pm \sqrt{(a+4)^2 - 16a}}{4} = \frac{a+4 \pm (a-4)}{4}; \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{a}{2}; \\ x = 2 \end{array}\right.$$

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)(x-2)\cdot\log_2\frac{|x|}{2}\leqslant 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_2\dfrac{|x|}{2}\leqslant 0\\ \left(x-\dfrac{a}{2}\right)(x-2)\geqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}\log_2\dfrac{|x|}{2}\geqslant 0\\ \left(x-\dfrac{a}{2}\right)(x-2)\leqslant 0\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x|\leqslant 2\\ \left(x-\dfrac{a}{2}\right)(x-2)\geqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}|x|\geqslant 2\\ \left(x-\dfrac{a}{2}\right)(x-2)\leqslant 0\end{cases}\end{array}\right..$$

При $\frac{a}{2}=-2$ $(a=-4)$ (очевидно, что тогда $-\frac{b}{2a}=0$)

имеем $(x+2)(x-2)\lg\frac{|x|}{2}\leqslant 0$,

тогда $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x+2)(x-2)\geqslant 0\\ |x|\leqslant 2\end{cases}\\ \begin{cases}(x+2)(x-2)\leqslant 0\\ |x|\geqslant 2\end{cases}\end{array}\right..$

Тогда в любом случае $\{-2;2\}$ – корни.

Ответ: при $a=-4$ неравенство $\left(2x^2-(a+4)x+2a\right)\log_2\frac{|x|}{2}\leqslant 0$ имеет только два решения $\{-2;2\}$.

9. Уравнение $2\lg(x+3)=\lg(ax+8)$ имеет единственный корень. Найдите все значения параметра a, при которых это возможно.

$2\lg(x+3)=\lg(ax+8)$ равносильно

$$\begin{cases}x+3>0\\ ax+8>0\\ (x+3)^2=ax+8\end{cases};\quad \begin{cases}x>-3\\ x^2+(6-a)x+1=0\end{cases};$$

$D = (6-a)^2 - 4 = (6-a+2)(6-a-2) = (8-a)(4-a)$.

$D \geqslant 0$

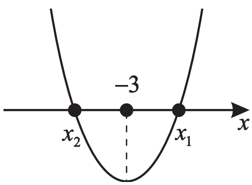
Уравнение имеет единственный корень,

если $D = 0$; $\left[\begin{array}{l} a = 8 \\ a = 4 \end{array}\right.$; $x_1 = x_2 = \dfrac{a-6}{2}$;

$a = 8$; $x = +1$;

$a = 4$; $x = -1$.

Так как $x > -3$, то возможен случай, что один из корней подходит, а другой нет.



Это возможно, если $f(-3) < 0$;

тогда $9 - (6-a)\,3 + 1 < 0$; $a < 2\dfrac{2}{3}$.

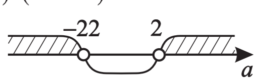
Ответ: уравнение $2\lg(x+3) = \lg(ax+8)$ имеет единственный корень при $a \in \left(-\infty; 2\dfrac{2}{3}\right) \cup \{4; 8\}$.

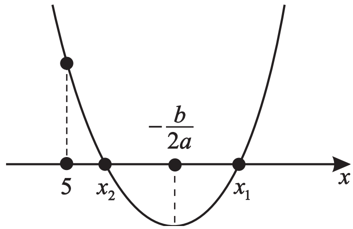
10. При каких значениях параметра a уравнение $2\lg(x-5) = \lg(ax-11)$ имеет только два корня?

$\begin{cases} x - 5 > 0 \\ (x-5)^2 = ax - 11 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 5 \\ x^2 - (10+a)\,x + 36 = 0 \end{cases}$;

$D = (10+a)^2 - 144 = (10+a+12)(10+a-12) =$
$= (a+22)(a-2)$.

$D > 0$.





Значит два корня есть, только если

$$\begin{cases} f(5) > 0 \\ D > 0 \\ \frac{10+a}{2} > 5 \end{cases}; \quad \begin{cases} 25 - 5(10+a) + 36 > 0 \\ (a+22)(a-2) > 0 \\ a > 0 \end{cases};$$

($x_0 = \frac{10+a}{2}$ – абсцисса вершины параболы)

$$\begin{cases} -25 - 5a + 36 > 0 \\ a > 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} a < \frac{11}{5} \\ a > 2 \end{cases}; \quad a \in (2;\, 2{,}2).$$

Ответ: при $a \in (2;\, 2{,}2)$ уравнение

$2\lg(x-5) = \lg(ax-11)$ имеет только два корня.

11. При каких значениях параметра a неравенство

$\log_{\frac{2a-15}{5}} \frac{\sin x + \sqrt{3}\cos x + a - 5}{5} > 0$ справедливо для любых x

из области определения $D(H)$?

а) Если $\frac{2a-15}{5} > 1$, то $y = \log_{\frac{2a-15}{5}} x$ – возрастающая,

тогда $\frac{\sin x + \sqrt{3}\cos x + a - 5}{5} > 1$.

$\sin x + \sqrt{3}\cos x > 10 - a$, но

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos x\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Тогда $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>\frac{10-a}{2}$, и если неравенство должно быть справедливо всегда, то это возможно только при $-1\geqslant\frac{10-a}{2}$; т.е. $a\geqslant 12$.

б) Если $0<\frac{2a-15}{5}<1$, то $7{,}5<a<10$, тогда

$y=\log_{\frac{2a-15}{2}} x$ – убывающая и неравенство равносильно

$$\begin{cases}\dfrac{\sin x+\sqrt{3}\cos x+a-5}{5}>0\\ \dfrac{\sin x+\sqrt{3}\cos x+a-5}{5}<1\end{cases}.$$

Тогда $\begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>\frac{5-a}{2}\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)<\frac{10-a}{2}\end{cases}$, т.е. $\frac{5-a}{2}<\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)<\frac{10-a}{2}$.

Чтобы это выполнялось, необходимо чтобы

$$\begin{cases}1\leqslant\dfrac{10-a}{2}\\ -1\geqslant\dfrac{5-a}{2}\end{cases};\quad \begin{cases}a\leqslant 8\\ a\geqslant 7\end{cases};\quad 7\leqslant a\leqslant 8.$$

Учитывая условие убывания, получим $7{,}5<a\leqslant 8$.

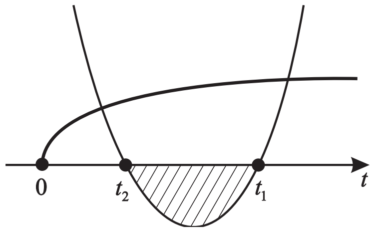
Ответ: неравенство $\log_{\frac{2a-15}{5}}\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x+a-5}{5}>0$ справедливо для любых $x\in D(H)$ при $a\geqslant 12$ или $7{,}5<a\leqslant 8$.

12. При каких значениях параметра a неравенство $\log_a\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)+\log_a\left(\sqrt{1-x^2}+7\right)<1$ справедливо для любых $x\in D(H)$?

Так как $\sqrt{1-x^2}+1>0$ и $\sqrt{1-x^2}+7>0$ при любых $x\in[-1;1]$, где $D(\mathrm{H})=[-1;1]$, то возможен переход $\log_a\left(\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-x^2}+7\right)\right)<\log_a a$.

а) Пусть $a > 1$, тогда $y = \log_a x$ возрастает, значит исходное неравенство равносильно $\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)\left(\sqrt{1-x^2}+7\right) < a$. Пусть $t = \sqrt{1-x^2}$ $(t \geqslant 0)$.

Тогда $(t+1)(t+7) < a$; $t^2 + 8t + 7 - a < 0$, что возможно для $t \geqslant 0$ не всегда, даже при положительном дискриминанте, что по условию не подходит.



б) Пусть $0 < a < 1$, тогда, учитывая введенные переменные и то, что $y = \log_a x$ при этом убывающая, получим $t^2 + 8t + 7 - a > 0$, что возможно для любых $t \geqslant 0$, если $7 - a > 0$.

Таким образом, если $a < 7$, помня условия убывания $y = \log_a x$, окончательно имеем $0 < a < 1$.

Ответ: при $0 < a < 1$ неравенство
$$\log_a\left(\sqrt{1-x^2}+1\right) + \log_a\left(\sqrt{1-x^2}+7\right) < 1$$
справедливо для любых $x \in [-1; 1]$.

13. При каких значениях параметра a неравенство
$$(\sin x)^{\lg \sin x - a^2} > 10^{\log_{100}\left(1-\cos^2 x\right)+\log_7 a}$$ справедливо для любых $x \in D(\mathrm{H})$?

$y = \lg x$ – возрастающая функция, поэтому прологарифмируем обе части неравенства по основанию 10, и при этом знак неравенства не изменится.

$\lg (\sin x)^{\lg \sin x - a^2} > \lg 10^{\log_{100}\left(1-\cos^2 x\right)+\log_7 a}$, тогда

$\left(\lg \sin x - a^2\right) \lg \sin x > \log_{100}\left(1-\cos^2 x\right) + \log_7 a$.

Пусть $\lg \sin x = t \quad (\sin x > 0)$.
Так как
$\log_{100}\left(1-\cos^2 x\right) = \log_{100} \sin^2 x = \lg |\sin x| = \lg \sin x$,

то $\left(t-a^2\right)t > t + \log_7 a; \qquad t^2 - \left(a^2+1\right)t - \log_7 a > 0$.

Учитывая, что $1 \geqslant \sin x > 0$, имеем $0 \geqslant \lg \sin x$, т.е. $t \leqslant 0$.

Если $-\log_7 a > 0$, то неравенство верно всегда при любом $t \leqslant 0$, но $-\log_7 a > 0$, тогда $\log_7 a < 0$, т.е. $0 < a < 1$.

Ответ: неравенство $(\sin x)^{\lg \sin x - a^2} > 10^{\log_{100}\left(1-\cos^2 x\right)+\log_7 a}$ справедливо для любых $x \in D(\text{Н})$ при $a \in (0;1)$.

14. При каких значениях параметра a уравнение

$\log_{0,25}\dfrac{30+\sqrt{4+\log_4^2 x}}{2} = a$ имеет решение?

По определению логарифма $\dfrac{30+\sqrt{4+\log_4^2 x}}{2} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^a$,

т.е. $\sqrt{4+\log_4^2 x} = 2\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^a - 30$.

Так как $\sqrt{4+\log_2^2 x} \geqslant 2$ для любых $x > 0$, то

$2\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^a - 30 \geqslant 2$, значит $\left(\dfrac{1}{4}\right)^a \geqslant 16$, т.е. $4^{-a} \geqslant 4^2$.

Учитывая, что функция $y = 4^x$ возрастающая, получаем $-a \geqslant 2$, т.е. $a \leqslant -2$.

Ответ: при $a \leqslant -2$ уравнение $\log_{0,25}\dfrac{30+\sqrt{4+\log_4^2 x}}{2} = a$ имеет решение.

Примечание. Задача может быть сформулирована иначе, например: для функции $y = \log_{0,25}\dfrac{30+\sqrt{4+\log_4^2 x}}{2}$ найти $E(y)$ (область изменения).

15. При каких значениях параметра a уравнение

$\log_a\left(\cos^2 x+1\right)+\log_a\left(\cos^2 x+5\right)=1$ имеет решение?

Так как $\cos^2 x+1>0$ и $\cos^2 x+5>0$ всегда,

то возможен переход

$\log_a\left(\left(\cos^2 x+1\right)\left(\cos^2 x+5\right)\right)=$

$=\log_a\left(\cos^2 x+1\right)+\log_a\left(\cos^2 x+5\right)$,

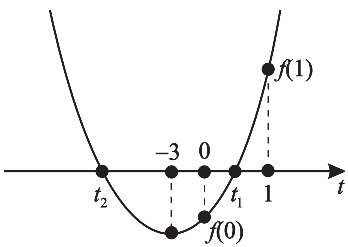
и уравнение примет вид

$\left(\cos^2 x+1\right)\left(\cos^2 x+5\right)=a$ при $\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$.

Пусть $\cos^2 x=t$, где $t\in[0;1]$,

тогда $t^2+6t+5-a=0$;

$t_0=-3$ (абсцисса вершины параболы).

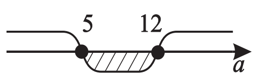


Чтобы существовал хотя бы один корень,
необходимо $f(0)\cdot f(1)\leqslant 0$,

где $f(t)=t^2+6t+5-a$.

Значит $\left(0^2+6\cdot 0+5-a\right)(1+6+5-a)\leqslant 0$;

$(5-a)(12-a)\leqslant 0$.



Ответ: уравнение $\log_a\left(\cos^2 x+1\right)+\log_a\left(\cos^2 x+5\right)=1$

имеет хотя бы одно решение при $a\in[5;12]$.

16. Найдите все значения параметра a, при которых

система уравнений $\begin{cases} 2^x + y = a + 4 \\ x + \log_2 y = 4 \end{cases}$ имеет решение.

Из второго уравнения $x = 4 - \log_2 y$. Подставляя в первое уравнение, получим

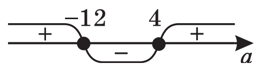
$2^{4-\log_2 y} + y = a + 4$; $\quad 2^4 \cdot \left(2^{\log_2 y}\right)^{-1} + y = a + 4$.

Таким образом, система принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{16}{y} + y = a + 4 \\ x = 4 - \log_2 y; \\ y > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 - (a+4)y + 16 = 0 \\ x = 4 - \log_2 y \\ y > 0 \end{cases}.$$

Проанализируем уравнение $y^2 - (a+4)y + 16 = 0$.

$D = (a+4)^2 - 64 = (a+12)(a-4)$,



т. е. при $a \in (-\infty; -12] \cup [4; \infty)$ уравнение имеет решение.

Но $y > 0$, значит, выясним, при каких a корни положительны.

Используя теорему Виета для уравнения $y^2 - (a+4)y + 16 = 0$, получим

$\begin{cases} y_1 + y_2 = a + 4 \\ y_1 \cdot y_2 = 16 \end{cases}$; $\begin{cases} 16 > 0 \\ a + 4 > 0 \end{cases}$; $\quad a > -4$.

Получаем, что только при $a \in [4; \infty)$ уравнение имеет положительные корни.

Ответ: при $a \in [4; \infty)$ система уравнений $\begin{cases} 2^x + y = a + 4 \\ x + \log_2 y = 4 \end{cases}$

имеет решение.

9
Задачи математического анализа

Практикум 9

1. При каких значениях параметра a $y_{\max} = y\left(1\right)$ для функции $y = \sqrt{x+a} + \sqrt{3-x}$?

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+a}} + \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$; $D\left(y\right)$: $-a \leqslant x \leqslant 3$, т.е. при $a \geqslant -3$

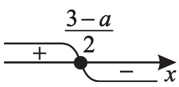
$y' = \frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x+a}}{2\sqrt{3-x}\sqrt{x+a}}$; $y' = 0$; $\sqrt{x+a} = \sqrt{3-x}$,

тогда $a = 3 - 2x$; $x = \frac{3-a}{2}$.

Так как $x_0 = 1$, то $a = 1 \in \left[-3; \infty\right)$.

$y' \leqslant 0$; $\sqrt{x+a} \geqslant \sqrt{3-x}$; $x + a \geqslant 3 - x$; $x \geqslant \frac{3-a}{2}$;

$y' \geqslant 0$; $\sqrt{x+a} \leqslant \sqrt{3-x}$; $x + a \leqslant 3 - x$; $x \leqslant \frac{3-a}{2}$.



Значит действительно при $a = 1$ $y\left(1\right) = y_{\max} = 2\sqrt{2}$.

Ответ: при $a = 1$ для функции $y = \sqrt{x+a} + \sqrt{3-x}$

$y\left(1\right) = y_{\max} = 2\sqrt{2}$.

2. При каких a уравнение $x^3 - (a+1)\,x^2 + \left(a^2 - 3\right)x + 2 = b$ имеет единственное решение для $\forall b$?

Для решения задачи обозначим
$\varphi(x) = x^3 - (a+1)\,x^2 + \left(a^2 - 3\right)x + 2 - b$.

Известно, что если функция строго монотонная
(строго убывающая или строго возрастающая),
то каждое своё значение она принимает только один раз.

Задачу можно переформулировать следующим образом.

При каких a $y = f(x)$ строго монотонная
(строго убывающая или строго возрастающая)?

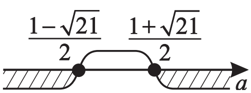
$\varphi'(x) = 3x^2 - 2(a+1)\,x + a^2 - 3$.

Необходимо, чтобы $\varphi'(x) \geqslant 0$ или $\varphi'(x) \leqslant 0$ для $\forall x$,
но это возможно, только если $D \leqslant 0$

($3 > 0$ – ветви параболы направлены вверх).

$D = (a+1)^2 - 3\left(a^2 - 3\right) = -2a^2 + 2a + 10 \leqslant 0$;

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+20}}{-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}.$$



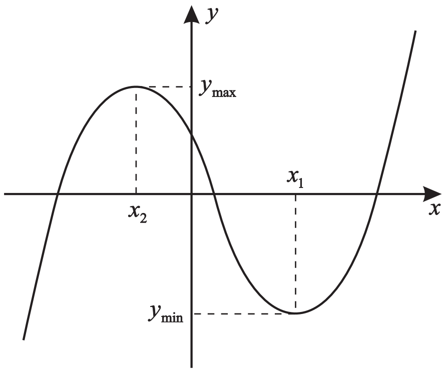
Для $\forall x$ $\varphi(x) \geqslant 0$

при $a \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{21}}{2}; \infty\right)$.

Ответ: при $a \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{21}}{2}; \infty\right)$ для $\forall b$
существует единственный корень уравнения
$x^3 - (a+1)\,x^2 + \left(a^2 - 3\right)x + 2 = b$.

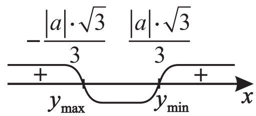
3. При каких a уравнение $x^3 - a^2x + 1 = 0$ имеет три различных корня?

Это возможно, только если $y_{\max} \cdot y_{\min} < 0$.



$$y' = 3x^2 - a^2; \quad y' = 0; \quad x^2 = \frac{a^2}{3}; \quad x = \pm\sqrt{\frac{a^2}{3}} = \pm\frac{|a|\sqrt{3}}{3};$$

Знаки производной:



$$y_{\min} = f\left(\frac{|a|\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{2}{9}a^2\,|a|\,\sqrt{3} + 1;$$

$$y_{\max} = f\left(\frac{-|a|\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{-|a|\sqrt{3}}{3}\right)^3 - a^2\left(-\frac{|a|\sqrt{3}}{3}\right) + 1 =$$

$$= -\frac{a^2|a|\sqrt{3}}{9} + \frac{a^2|a|\sqrt{3}}{3} + 1 = \frac{2}{9}a^2\,|a|\,\sqrt{3} + 1;$$

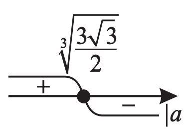
$$y_{\max} \cdot y_{\min} = \left(\frac{2}{9}a^2\,|a|\,\sqrt{3} + 1\right)\left(-\frac{2}{9}a^2\,|a|\,\sqrt{3} + 1\right) < 0.$$

Так как если $\frac{2}{9}a^2\,|a|\,\sqrt{3} + 1 = 0$,

то $|a|^3 = -\frac{9}{2\sqrt{3}}$; $|a| = -\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$ – корней нет.

Значит $\frac{2}{9}a^2\,|a|\,\sqrt{3} + 1 > 0$ для $\forall a$,

тогда $-\frac{2}{9}a^2\,|a|\,\sqrt{3} + 1 < 0$; $|a| = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$.



Значит при $|a| > \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{27}}{2}}$ $\left[\begin{array}{l} a > \sqrt[6]{\dfrac{27}{4}} \\ a < -\sqrt[6]{\dfrac{27}{4}} \end{array}\right.$ существуют три корня.

Ответ: при $a \in \left(-\infty; -\sqrt[6]{\dfrac{27}{4}}\right) \cup \left(\sqrt[6]{\dfrac{27}{4}}; \infty\right)$ уравнение $x^3 - a^2x + 1 = 0$ имеет три различных корня.

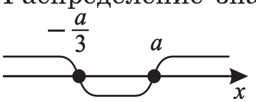
4. Сколько решений имеет уравнение $x^3 - a^2x + 1 = ax^2$ в зависимости от значения параметра a?

$x^3 - a^2x + 1 = ax^2$;
$x^3 - a^2x + 1 - ax^2 = 0$;
$y = x^3 - ax^2 - a^2x + 1$.

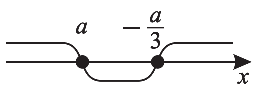
Исследуем $y' = 3x^2 - 2ax - a^2$; $y' = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 3a^2}}{3} = \frac{a \pm 2a}{3}; \quad \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = -\dfrac{a}{3} \end{array}\right..$$

Распределение знаков производной:



$a > 0$;



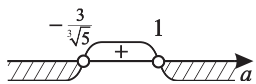
$a < 0$.

Но порядок корней несущественен, так как главное, чтобы $y_{\max} \cdot y_{\min} < 0$, т.е. $f(a) \cdot f\left(-\dfrac{a}{3}\right) < 0$. Только в этом случае есть три корня, а при каких знаках a достигаются максимум или минимум – безразлично.

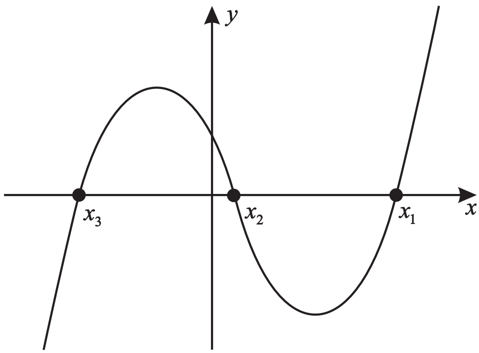
1) $f(a) = a^3 - a^3 - a^3 + 1 = 1 - a^3$;

$$f\left(-\frac{a}{3}\right) = -\frac{a^3}{27} - \frac{a^3}{9} + \frac{a^3}{3} + 1 = \frac{5}{27}a^3 + 1;$$

$$f(a) \cdot f\left(-\frac{a}{3}\right) = \left(1 - a^3\right)\left(\frac{5}{27}a^3 + 1\right) < 0;$$



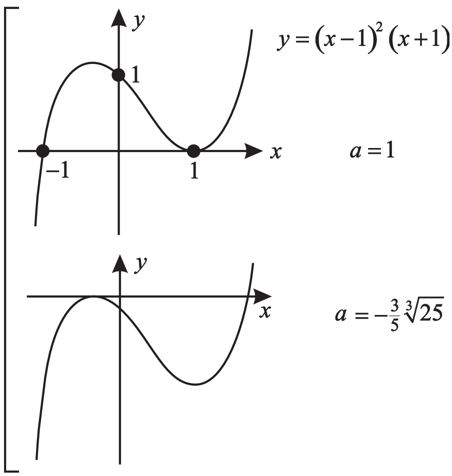
т.е. при $a \in \left(-\infty; -\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{25}\right) \cup (1; \infty)$ существуют три корня.



2) Условие существования двух корней $y_{\min} \cdot y_{\max} = 0$,

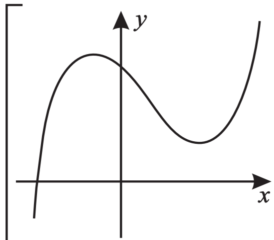
т.е. $\left[\begin{array}{l} f(a) = 0 \\ f\left(-\frac{a}{3}\right) = 0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{25} \end{array}\right.$ – существуют два корня.

Графическая иллюстрация

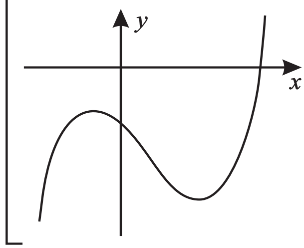


3) Для существования единственного корня достаточно, чтобы $f(a) \cdot f\left(-\frac{a}{3}\right) > 0 \quad (y_{\max} \cdot y_{\min} > 0)$ или $a = 0$,

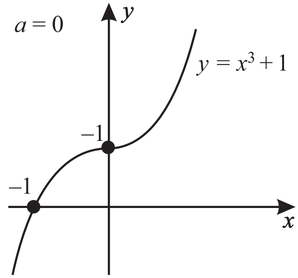
а) $\begin{cases} f(a) > 0 \\ f\left(-\frac{a}{3}\right) > 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} f(a) < 0 \\ f\left(-\frac{a}{3}\right) < 0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} a = 0 \\ y = x^3 + 1 \end{cases}$, а)



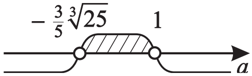
б)



в)



т.е. $f(a)\cdot f\left(-\dfrac{a}{3}\right)=\left(1-a^3\right)\left(\dfrac{5}{27}a^3+1\right)>0$;



$a\in\left(-\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{25};\,1\right)$,

тогда возможно только а).

Ответ: в уравнении $x^3-a^2x+1=ax^2$

1) при $a\in\left(-\infty;\,-\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{25}\right)\cup\left(1;\,\infty\right)$ существуют три корня;

2) при $\left[\begin{array}{l}a=1\\ a=-\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{25}\end{array}\right.$ – два корня;

3) при $a\in\left(-\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{25};\,1\right)$ – один корень.

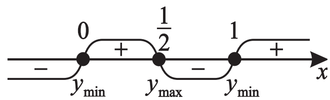
5. При каких значениях параметра a $\exists$ только три корня уравнения $x^2\left(x-1\right)^2=a$?

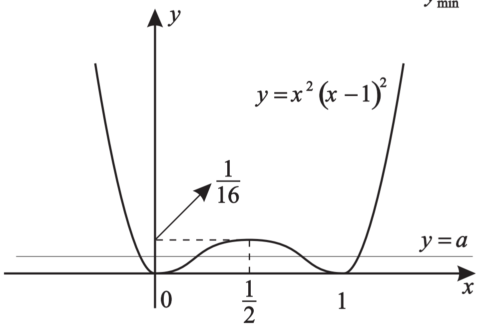
Построим эскиз графика.

а) $x^2\left(x-1\right)^2=0$; $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$;

б) $x^2\left(x-1\right)^2\geqslant 0$ для $\forall x$;

в) $y'=2x\left(x-1\right)\left(2x-1\right)$;





г) $y_{\min}=y\left(0\right)=0^2\left(0-1\right)^2=0$;

$y_{\max}=y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}-1\right)^2=\dfrac{1}{16}$; $\quad y_{\min}=y\left(1\right)=0$.

Исходя из графика при $a=\dfrac{1}{16}$ получаем три корня.

Ответ: при $a=\dfrac{1}{16}$ существуют только три корня уравнения $x^2\left(x-1\right)^2=a$.

6. При каких значениях параметра a существуют четыре корня уравнения $x^2+x+\dfrac{9}{x^2+x+1}=a$?

Построим эскиз графика.

а) $D\left(y\right)=\left(-\infty;\infty\right)$.

б) Пусть $x^2+x+1=t \quad \left(t>0\right)$.

$$y=x^2+x+\frac{9}{x^2+x+1}=t-1+\frac{9}{t}=\frac{t^2-t+9}{t};\quad \frac{t^2-t+9}{t}>0.$$

Так как $t>0$, $t^2-t+9>0$; $\left\{\begin{array}{l} a=1>0 \\ D<0 \end{array}\right.$.

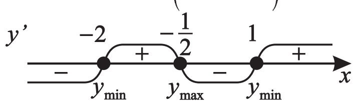
в) $y' = 2x + 1 - \dfrac{9(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2} = \dfrac{(2x+1)\left(\left(x^2+x+1\right)^2-9\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2} =$

$= \dfrac{(2x+1)\left(x^2+x+1+3\right)\left(x^2+x+1-3\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2} =$

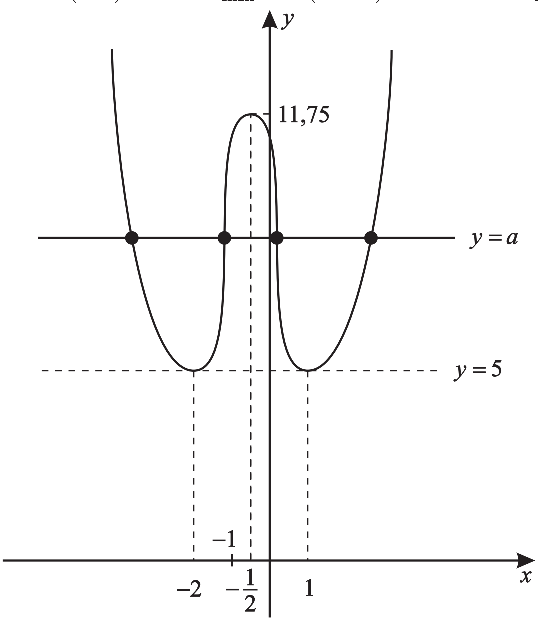
$= \dfrac{(2x+1)(x+2)(x-1)\left(x^2+x+4\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}.$

г) Выясним корни и знаки производной.

$y' = \dfrac{(2x+1)(x+2)(x-1)\left(x^2+x+4\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2} \quad \left(x^2 + x + 4 > 0\right);$



$f(-2) = 5 = y_{\min}$; $f(-0{,}5) = 11{,}75 = y_{\max}$; $f(1) = 5 = y_{\min}$.



Ответ: при $a \in (5; 11{,}75)$ существуют четыре корня уравнения $x^2 + x + \dfrac{9}{x^2+x+1} = a$.

Примечание. Задача может быть сформулирована иначе. При каких значениях параметра a уравнение имеет
а) только три корня;
б) только два корня и т. д.?

7. При каком значении параметра m функция $f(x)=\sqrt[3]{5x^2+mx-3}$ имеет минимум при $x_0=1{,}3$?

Рассмотрим $t(x)=5x^2+mx-3$. Это квадратичная функция.

$t_{\min}=t(x_0)$, где $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ – абсцисса вершины параболы.

В данном случае $x_0=-\dfrac{m}{2\cdot 5}=1{,}3$, тогда $m=-13$.

Так как $t_0=t(x_0)=t_{\min}$, то в силу монотонности

$f(t)=\sqrt[3]{t}$ – $f(t)$ – возрастающая, тогда $f_{\min}=f(t_0)$, т.е. $f(x_0)$ – минимум.

Ответ: при $m=-13$ функция $f(x)=\sqrt[3]{5x^2+mx-3}$ имеет минимум в точке $x_0=1{,}3$.

8. Вычислить площадь сегмента, ограниченного графиком функции $y=\dfrac{x^2}{2}$ и прямой $y=kx+\dfrac{3}{2}$, и найти его наименьшую площадь в зависимости от значения параметра k.

Иллюстрируем задачу эскизами графиков кривой и прямой $y=kx+1{,}5$.

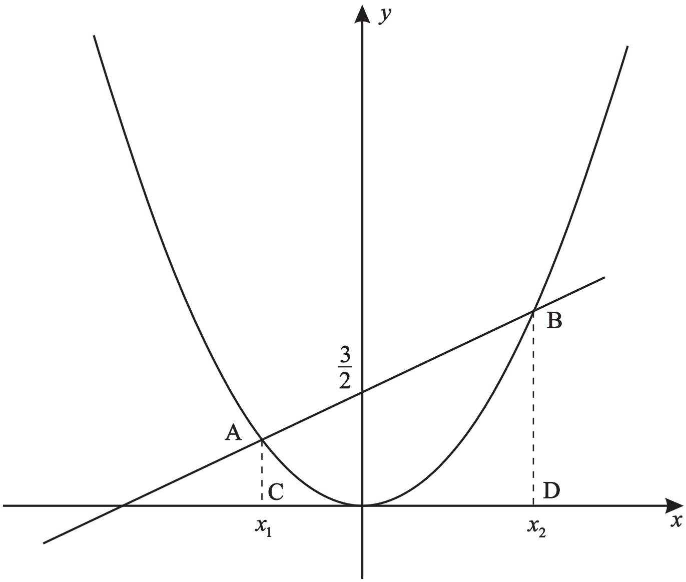
x_1; x_2 – корни уравнения $\dfrac{x^2}{2}=kx+\dfrac{3}{2}$.

а) $S_{ABDC}=\dfrac{AC+BD}{2}\cdot CD=\dfrac{\frac{x_1^2}{2}+\frac{x_2^2}{2}}{2}\left(x_2-x_1\right)=\dfrac{\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(x_2-x_1\right)}{4}$;

$$S_{сег}=S_{ABDC}-\int_{x_1}^{x_2}\frac{x^2}{2}\,dx=\frac{\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(x_2-x_1\right)}{4}-\frac{1}{6}\left(x_2^3-x_1^3\right)=$$

$$=\frac{x_2-x_1}{12}\left[3x_1^2+3x_2^2-2x_2^2-2x_2\cdot x_1-2x_1^2\right]=$$

$$=\frac{x_2-x_1}{12}\left(x_1-x_2\right)^2=\frac{1}{12}\left(x_2-x_1\right)^3.$$



б) Найдём наименьшую площадь параболического сегмента в зависимости от k.

Так как $\begin{cases} y = kx + \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$ $\quad \dfrac{x^2}{2} = kx + \dfrac{3}{2}$; $\quad x^2 - 2kx - 3 = 0$;

$$\begin{matrix} x_2 = k + \sqrt{k^2 + 3} \\ x_1 = k - \sqrt{k^2 + 3} \end{matrix} \Rightarrow \left| x_2 - x_1 \right| = 2\sqrt{k^2 + 3}.$$

Значит $S(k) = \dfrac{1}{12}\left(2\sqrt{k^2 + 3}\right)^3$.

$$S_{\min} = S(0) = \frac{1}{12} \cdot 2^3 \cdot 3^{3/2} = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

Итак, $S_{\min} = S_{\text{наим}} = 2\sqrt{3}$.

Ответ: $S = \dfrac{1}{12}\left(2\sqrt{k^2 + 3}\right)^3$; $S_{\text{наим}} = 2\sqrt{3}$ при $k = 0$.

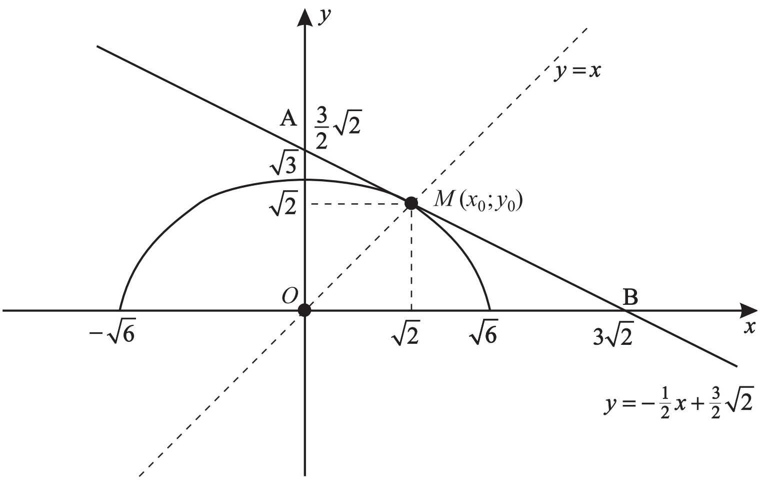
9. Найдите уравнение площади треугольника, который образует касательная к графику функции

$f\left(x\right)=\sqrt{3-\dfrac{x^2}{2}}$ в точке $M\left(x_0;\,y_0\right)$ и неотрицательные

полуоси координат. А также наименьшее значение $S_{\triangle}$

и при каких x_0 это выполняется.

Построим эскиз графика $f\left(x\right)=\sqrt{3-\dfrac{x^2}{2}}$, учитывая, что она чётная. Значит график её симметричен относительно оси oy. $D\left(y\right)=\left[0;\sqrt{6}\right]$ (так как полуоси неотрицательны).



$y_0=f\left(x_0\right)=\sqrt{3-\dfrac{x_0^2}{2}}$.

Найдём уравнение касательной.

$$\boxed{y=y\left(x_0\right)+y'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)};$$

$$y_{x_0}{}'=-\frac{x_0}{2\sqrt{3-\frac{x_0^2}{2}}};$$

$$y=\sqrt{3-\frac{x_0^2}{2}}-\frac{x_0\left(x-x_0\right)}{2\sqrt{3-\frac{x_0^2}{2}}}$$ – уравнение касательной.

Пусть $x = 0$.

$$y(0) = \sqrt{3 - \frac{x_0^2}{2}} + \frac{x_0^2}{2\sqrt{3-\frac{x_0^2}{2}}} = \frac{2\left(3-\frac{x_0^2}{2}\right)+x_0^2}{2\sqrt{3-\frac{x_0^2}{2}}} = \frac{6}{2\sqrt{3-\frac{x_0^2}{2}}} = \frac{3}{\sqrt{3-\frac{x_0^2}{2}}};$$

$$y = 0; \quad \sqrt{3 - \frac{x_0^2}{2}} = \frac{x_0(x-x_0)}{2\sqrt{3-\frac{x_0^2}{2}}}; \quad 2\left(3 - \frac{x_0^2}{2}\right) = x_0(x - x_0);$$

$$x - x_0 = \frac{6-x_0^2}{x_0}; \quad x = x_0 + \frac{6-x_0^2}{x_0}; \quad x = \frac{x_0^2+6-x_0^2}{x_0}; \quad x = \frac{6}{x_0}.$$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}\frac{6}{2\sqrt{3-\frac{x_0^2}{2}}}\cdot\frac{6}{x_0}; \quad S(x_0) = \frac{18}{2x_0\sqrt{3-\frac{x_0^2}{2}}} = \frac{9}{x_0\sqrt{3-\frac{x_0^2}{2}}};$$

т.е. $S(x_0) = \dfrac{9}{x_0\sqrt{3-\frac{x_0^2}{2}}}$ ($S(x_0)$ – функция площади).

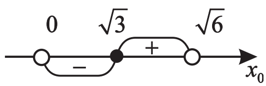
Для удобства выразим $S(x_0) = \dfrac{9}{\sqrt{3x_0^2-\frac{1}{2}x_0^4}}$.

$$S'(x_0) = \left(9\cdot\left(3x_0^2 - \frac{1}{2}x_0^4\right)^{-\frac{1}{2}}\right)'.$$

$$S'(x_0) = -\frac{1}{2}\,9\cdot\left(6x_0 - 2x_0^3\right)\left(3x_0^2 - \frac{1}{2}x_0^4\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{9x_0(x_0^2-3)}{\left(\sqrt{3x_0^2-\frac{1}{2}x_0^4}\right)^3}.$$

Учитывая, что $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{6}$,

S'



$$y_{\min} = y_{\text{наим}} = y\left(\sqrt{3}\right) = \frac{18}{2\cdot 3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}} = 3\sqrt{2}$$

в силу непрерывности на $D(S) = \left(0; \sqrt{6}\right)$.

Ответ: касательная к графику функции $f(x) = \sqrt{3 - \dfrac{x^2}{2}}$ в точке $M(x_0; y_0)$ отсекает площадь $S_{\triangle AOB} = \dfrac{1}{2}\dfrac{6}{2\sqrt{3-\frac{x_0^2}{2}}}\cdot\dfrac{6}{x_0}$; наименьшее значение площади $y_{\text{наим}} = 3\sqrt{2}$ при $x_0 = \sqrt{3}$.

Примечание. Здесь x_0 выступает в роли параметра.

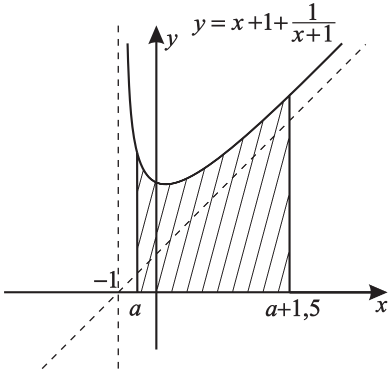
10. Найдите наименьшее значение площади фигуры, ограниченной графиком $y = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$ и прямыми $y = 0$; $x = a$; $x = a + 1{,}5$ при $a > -1$, и укажите, при каких значениях параметра a это значение достигается.

$$S(a) = \int\limits_a^{a+1,5} \left(x + 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx = \left(\frac{1}{2}(x+1)^2 + \ln|x+1|\right)\Bigg|_a^{a+1,5} =$$

$$= -\left[\frac{1}{2}(a+1)^2 + \ln(a+1)\right] + \frac{1}{2}(a+2{,}5)^2 + \ln(a+2{,}5) =$$

$$= \frac{1}{2}(a + 2{,}5 + a + 1)(a + 2{,}5 - a - 1) + \ln\frac{a+2{,}5}{a+1} =$$

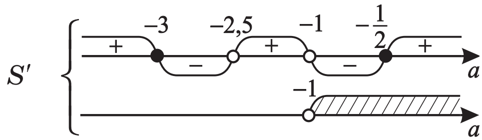
$$= \frac{1}{2}(2a + 3{,}5)\cdot 1{,}5 + \ln\left(1 + \frac{1{,}5}{a+1}\right) = 1{,}5a + \frac{21}{8} + \ln\left(1 + \frac{1{,}5}{a+1}\right).$$



$$S(a) = 1{,}5a + \frac{21}{8} + \ln\left(1 + \frac{1{,}5}{a+1}\right); \qquad S'(a) = 1{,}5 + \frac{1\cdot\frac{-1{,}5}{(a+1)^2}}{1+\frac{1{,}5}{a+1}};$$

$$S'(a) = 1{,}5 + \frac{-1{,}5}{(a+2{,}5)(a+1)} = \frac{1{,}5\left[(a+2{,}5)(a+1)-1\right]}{(a+2{,}5)(a+1)} =$$

$$= \frac{1{,}5\left(a^2+3{,}5a+1{,}5\right)}{(a+2{,}5)(a+1)} = \frac{3\left(2a^2+7a+3\right)}{4(a+2{,}5)(a+1)} = \frac{3(a+3)(2a+1)}{2(2a+5)(a+1)}.$$



$y_{\min} = y_{наим} = f\left(-\frac{1}{2}\right)$ в силу непрерывности на $(-1; \infty)$.

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1{,}5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{21}{8} + \ln\left(1 + \frac{1{,}5}{-\frac{1}{2}+1}\right) =$

$= -\frac{3}{4} + \frac{21}{8} + \ln(1+3) = \frac{15}{8} + \ln 4 = S_{наим}$.

Ответ: наименьшего значения площадь фигуры, ограниченной графиком кривой $y = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$ и прямыми $y = 0$; $x = a$; $y = a + 1{,}5$, достигает при $a = -\frac{1}{2}$ и $S_{наим} = \frac{15}{8} + \ln 4$.

11. Сколько корней имеет уравнение
$\sqrt{6-x} + \sqrt{x+3} = ax + 2$ в зависимости от параметра a?

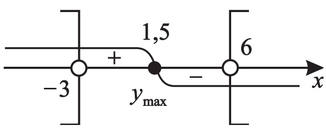
Будем решать этот вопрос, используя график $y = f(x)$, где $f(x) = \sqrt{6-x} + \sqrt{x+3}$.

1) $D(y) = [-3; 6]$.

2) $y' = \frac{\sqrt{6-x} - \sqrt{x+3}}{2\sqrt{6-x}\cdot\sqrt{x+3}}$;

$y' \geqslant 0$; $\sqrt{6-x} \geqslant \sqrt{x+3}$; $6 - x \geqslant x + 3$; $-3 < x \leqslant 1{,}5$;

$y' \leqslant 0$; $\sqrt{6-x} \leqslant \sqrt{x+3}$; $6 - x \leqslant x + 3$; $6 > x \geqslant 1{,}5$;



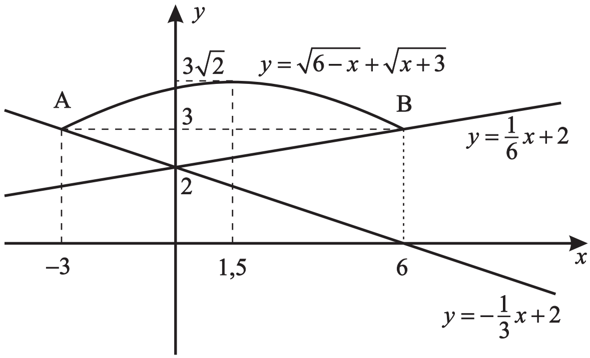
$y(1{,}5) = 3\sqrt{2} = y_{\max}$;

$f(6) = 3$; $f(-3) = 3$; $A(-3; 3)$; $B(6; 3)$.

$A \in \Gamma(y = ax + 2)$; $3 = a(-3) + 2$; $a = -\frac{1}{3}$,

т.е. $y = -\frac{1}{3}x + 2$;

$B \in \Gamma(y = ax + 2)$; $3 = a \cdot 6 + 2$; $a = \frac{1}{6}$, т.е. $y = \frac{1}{6}x + 2$.



Из графика можно сделать выводы:

1) при $a \in \left[\frac{1}{6}; \infty\right)$ существует один корень;

2) при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$ существует один корень;

3) при $a \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{6}\right)$ корней нет.

Ответ: в уравнении $\sqrt{6-x}+\sqrt{x+3}=ax+2$

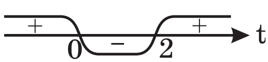
1) при $a \in \left[\frac{1}{6}; \infty\right)$ существует один корень;

2) при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$ существует один корень;

3) при $a \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{6}\right)$ корней нет.

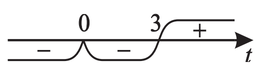
12. Сколько корней имеет уравнение $t^3 - 3t^2 = a$ в зависимости от значений параметра a?

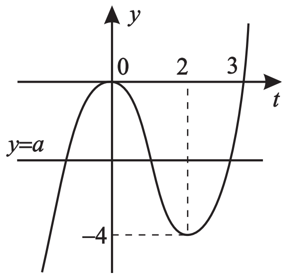
Пусть $y = t^3 - 3t^2 = t^2\left(t-3\right)$; $y' = 3t^2 - 6t = 3t\left(t-2\right)$;



$y_{\max} = y\left(0\right) = 0$; $y_{\min} = y\left(2\right) = 8 - 12 = -4$.

Решим этот вопрос графически.





Ответ: в уравнении $t^3 - 3t^2 = a$ при

1) $a < -4$ существует единственный корень;
2) $a = -4$ существуют два корня;
3) $-4 < a < 0$ существуют три корня;
4) $a = 0$ существуют два корня;
5) $a > 0$ существует единственный корень.

13. $\sqrt{x^2+x+7} - \sqrt{x^2-x+1} = a$.

1) При каких значениях параметра a уравнение имеет решение?
2) При каких целых значениях k уравнение $\sqrt{k^2+k+7} - \sqrt{k^2-k+1} = a$ имеет решение, где a – рациональное число?

1) По сути мы исследуем область изменения функции

$$y = \sqrt{x^2+x+7} - \sqrt{x^2-x+1}. \qquad D(y) = (-\infty; \infty).$$

Для решения этого вопроса используем идеи математического анализа.

$$y' = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+7}} - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}; \quad \left(y = \sqrt{x^2+x+7} - \sqrt{x^2-x+1}\right)$$

$$y' \geqslant 0 \quad \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+7}} \geqslant \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}};$$

$$(2x+1)\sqrt{x^2-x+1} \geqslant (2x-1)\sqrt{x^2+x+7}.$$

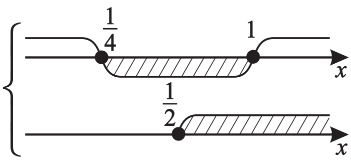
а) $x \geqslant \dfrac{1}{2}$;

$$\left(4x^2+4x+1\right)\left(x^2-x+1\right) \geqslant \left(4x^2-4x+1\right)\left(x^2+x+7\right);$$

$$\underline{4x^4}+\underline{\underline{4x^3}}+x^2-\underline{\underline{4x^3}}-4x^2-x+4x^2+4x+1 \geqslant$$

$$\geqslant \underline{4x^4}-\underline{\underline{4x^3}}+x^2+\underline{\underline{4x^3}}-4x^2+x+28x^2-28x+7;$$

$$\begin{cases}24x^2-30x+6 \leqslant 0\\ x \geqslant \dfrac{1}{2}\end{cases}; \quad \begin{cases}4x^2-5x+1 \leqslant 0\\ x \geqslant \dfrac{1}{2}\end{cases};$$



$x \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$.

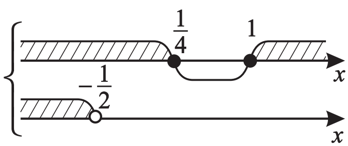
б) $-\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; y' \geqslant 0$ всегда, так как для исходного неравенства правая часть всегда неположительна и левая неотрицательна.

в) $x < -\dfrac{1}{2} \;\Rightarrow$

$$\left(4x^2+4x+1\right)\left(x^2-x+1\right) \leqslant \left(4x^2-4x+1\right)\left(x^2+x+7\right).$$

Так как если $\begin{cases}a<0\\ b<0\end{cases}$, то $a \geqslant b \;\Leftrightarrow\; a^2 \leqslant b^2$;

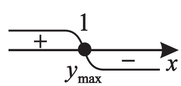
$$\begin{cases}4x^2-5x+1 \geqslant 0\\ x < -\dfrac{1}{2}\end{cases};$$



$x < -\dfrac{1}{2}$

Итак, $y' \geqslant 0$ для $\forall x \leqslant 1$.

Соответственно $y' \leqslant 0$ для $\forall x \geqslant 1$.



Значит $y_{\max} = y\left(1\right) = 2$.

г) Рассмотрим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+7}-\sqrt{x^2-x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+6}{\sqrt{x^2+x+7}+\sqrt{x^2-x+1}}=$$

$$=2\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=1\,.$$

д) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+7}-\sqrt{x^2-x+1}\right)=-1\,.$

Так как $\sqrt{x^2+x+7}=\begin{cases} x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{7}{x^2}}; & x>0\\ -x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{7}{x^2}}; & x<0\end{cases}$,

$f\left(1\right)=2=y_{наиб}=y_{\max}$ (в силу непрерывности).

И при $a\in\left(-1;\,2\right]$ уравнение

$\sqrt{x^2+x+7}-\sqrt{x^2-x+1}=a$ имеет решение, или

$E\left(y\right)=\left(-1;\,2\right]$, где $y=\sqrt{x^2+x+7}-\sqrt{x^2-x+1}\,.$

2) При каких целых k

$f\left(k\right)=\sqrt{k^2+k+7}-\sqrt{k^2-k+1}$ – рационально,

т.е. $f\left(k\right)\in\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел)?

$$f\left(k\right)=\sqrt{k^2+k+7}-\sqrt{k^2-k+1}=\frac{2k+6}{\sqrt{k^2+k+7}+\sqrt{k^2-k+1}}-$$

рациональное, если

а) $k=-3\ \Rightarrow\ f\left(k\right)=0\ \in\mathbb{Q}\,.$

б) Так как $\begin{cases}\sqrt{k^2+k+7}\in\mathbb{Q}\\ \sqrt{k^2-k+1}\in\mathbb{Q}\end{cases}$, но корень из целого есть

или целое, или иррациональное, и так как

$f\left(k\right)\in\mathbb{Q}$ по условию, то $f\left(k\right)\in\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ – целое число).

Но $f(k) \in (-1; 2]$, поэтому $\left[\begin{array}{l} f(k)=0 \\ f(k)=1\,; \\ f(k)=2 \end{array}\right.$

$f(k)=0$; $\sqrt{k^2+k+7}=\sqrt{k^2-k+1}$; $2k=-6$; $k=-3$;

$f(k)=1$; $\sqrt{k^2+k+7}-\sqrt{k^2-k+1}=1$; $k=-\dfrac{7}{8}\notin\mathbb{Z}$;

$f(k)=2$; $\sqrt{k^2+k+7}-\sqrt{k^2-k+1}=2$;

$k=1$ [см. пункт 1), в)].

Ответ: уравнение $a=\sqrt{x^2+x+7}-\sqrt{x^2-x+1}$ имеет решение

1) при $a\in(-1;2]$;

2) при $k\in\{-3;1\}$ $f(k)\in\mathbb{Q}$, если $k\in\mathbb{Z}$.

14. При каких значениях параметра a $y=\dfrac{4^x-a\cdot 2^x}{2^x-1}$ монотонна на $(-\infty;0)$?

Дано $y=\dfrac{4^x-a\cdot 2^x}{2^x-1}$. Найдём y'.

$$y'=\frac{\left(4^x\ln 4-a\cdot 2^x\ln 2\right)\left(2^x-1\right)-\left(4^x-a\cdot 2^x\right)2^x\ln 2}{\left(2^x-1\right)^2}=$$

$$=\frac{2^x\cdot 4^x\ln 4-4^x\ln 4-\cancel{a\cdot 4^x\ln 2}+a\cdot 2^x\ln 2-2^x\cdot 4^x\cdot\ln 2+\cancel{a\cdot 4^x\ln 2}}{\left(2^x-1\right)^2}=$$

$$=\frac{8^x\ln 2-2\cdot 4^x\ln 2+a\cdot 2^x\cdot\ln 2}{\left(2^x-1\right)^2}=\frac{2^x\cdot\left(4^x-2\cdot 2^x+a\right)\cdot\ln 2}{\left(2^x-1\right)^2}.$$

Но $2^x\ln 2>0$ для $\forall x$, тогда знак производной зависит только от знака $\dfrac{4^x-2\cdot 2^x+a}{\left(2^x-1\right)^2}$.

Пусть $2^x=t$; $\varphi(t)=t^2-2t+a$; $D=1-a<0$; $a>1$.

Значит $\varphi(t) > 0$ при $a > 1$ $(\forall t \neq 1)$,

т.е. $\begin{cases} y' > 0 \\ 2^x \neq 1 ; \\ a > 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y = f(x) \uparrow \\ a > 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$.

Ответ: $y = \frac{4^x - a \cdot 2^x}{2^x - 1}$ возрастает на $(-\infty;0)$ при $a > 1$.

15. Сколько корней имеет уравнение

$\sqrt{\log_{0,3} x + 2} + \sqrt{\log_{0,3} x + 3} + \sqrt{\log_{0,3} x + 4} = a$

в зависимости от значения параметра a?

1) Так как

а) $y_1 = \log_{0,3} x + 2$ – строго убывающая функция, то $g_1(x) = \sqrt{y_1}$ – тоже строго убывающая функция.

б) $y_2 = \log_{0,3} x + 3$ – строго убывающая функция, то $g_2(x) = \sqrt{y_2}$ – тоже строго убывающая функция.

в) $y_3 = \log_{0,3} x + 4$ – строго убывающая функция, то $g_3(x) = \sqrt{y_3}$ – тоже строго убывающая функция.

Значит

г) $f(x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x)$ – строго убывающая функция. Тогда каждое свое значение она принимает только один раз. Значит, если уравнение имеет решение, то оно единственное.

2) Пусть $t = \log_{0,3} x + 2$, но $D(y)$: $t \geqslant 0$.

Пусть $\varphi(t) = \sqrt{t} + \sqrt{t+1} + \sqrt{t+2}$,

тогда $\varphi(t)$ – строго возрастающая.

$t = 0$ – наименьшее значение, тогда

$\varphi_{\text{наим}} = \varphi_{\text{наим}}(t) = \varphi(0) = 0 + \sqrt{1} + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}$, значит

при $a \geqslant 1 + \sqrt{2}$ решение есть.

Ответ: 1) при $a \geqslant 1 + \sqrt{2}$ существует единственное решение;

2) при $a < 1 + \sqrt{2}$ решения не существует.

16. При каких значениях параметра $\alpha \in [0; \pi]$ наименьшее значение функции $y = \frac{x^2}{3} - 6x \operatorname{tg} \alpha - 10 \cos 2\alpha$ равно -11?

Так как мы имеем дело с квадратичной функцией ветвями вверх, то при $x_0 = -\frac{b}{2a}$ $\quad y_0 = y_{\min} = y_{\text{наим}}$.

Тогда $x_0 = -\frac{-6 \operatorname{tg} \alpha}{2 \cdot \frac{1}{3}} = 9 \operatorname{tg} \alpha$.

$y(x_0) = y(9 \operatorname{tg} \alpha) = \frac{81 \operatorname{tg}^2 \alpha}{3} - 6 \cdot 9 \operatorname{tg}^2 \alpha - 10 \cos 2\alpha$,

т.е. $y(x_0) = y_{\text{наим}} = -27 \operatorname{tg}^2 \alpha - 10 \cos 2\alpha = -11$.

Решим это уравнение.

$$-27 \operatorname{tg}^2 \alpha - 10 \frac{1-\operatorname{tg}^2 \alpha}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha} = -11 \qquad \left(\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2 \alpha}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}\right);$$

$$-27 \operatorname{tg}^2 \alpha \left(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha\right) - 10\left(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha\right) = -11 - 11 \operatorname{tg}^2 \alpha;$$

$$27 \operatorname{tg}^4 \alpha + 6 \operatorname{tg}^2 \alpha - 1 = 0;$$

$$\left(\operatorname{tg}^2 \alpha\right)_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+27}}{27} = \frac{-3 \pm 6}{27}; \quad \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{9} \\ \operatorname{tg}^2 \alpha = -\frac{1}{3} \qquad \varnothing \end{array}\right..$$

Итак, $\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3} \\ \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3} \end{array}\right.$; $\quad \left[\begin{array}{l} \alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n; \;\; n \in \mathbb{Z} \\ \alpha = -\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k; \;\; k \in \mathbb{Z} \end{array}\right..$

Учитывая ограничения для α, получим $\left[\begin{array}{l} \alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} \\ \alpha = \pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} \end{array}\right..$

Ответ: наименьшее значение функции

$y = \frac{x^2}{3} - 6x \operatorname{tg} \alpha - 10 \cos 2\alpha$ равно -11 при

$\alpha \in \left\{\operatorname{arctg} \frac{1}{3}; \pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right\}$.

17. При каких значениях параметра a число 2 является точкой минимума функции $y=(2x-a)^6\,(x+a-1)^4$?

1) $y' = 6\cdot 2\cdot(2x-a)^5\,(x+a-1)^4+4\cdot(x+a-1)^3\,(2x-a)^6 =$
$= 4\cdot(2x-a)^5\,(x+a-1)^3\,(5x+2a-3)$.

2) Найдем критические точки,
т.е. решим уравнение $y'(x)=0$: $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{a}{2} \\ x=1-a \\ x=\dfrac{3-2a}{5} \end{array}\right.$.

3) $\dfrac{a}{2}=1-a;\quad a=\dfrac{2}{3};$

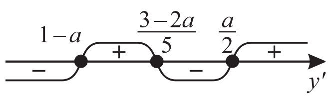
$\dfrac{a}{2}=\dfrac{3-2a}{5};\quad a=\dfrac{2}{3};$

$1-a=\dfrac{3-2a}{5};\quad a=\dfrac{2}{3}.$

Значит, из совпадения двух критических точек следует совпадение и с третьей точкой. Тогда $x=\dfrac{1}{3}$.

4) Чтобы установить, в каких точках имеется минимум, необходимо расположить корни производной в порядке возрастания.

а) Пусть $a>\dfrac{2}{3}$. Тогда $1-a<\dfrac{3-2a}{5}<\dfrac{a}{2}$, значит



$y_{\min}=y(1-a)$, т.е. $1-a=2;\quad a=-1;$

$y_{\min}=y\left(\dfrac{a}{2}\right)$, т.е. $\dfrac{a}{2}=2;\quad a=4$.

б) Пусть $a<\dfrac{2}{3}$. Тогда $\dfrac{a}{2}<\dfrac{3-2a}{5}<1-a$.

Рассматривая аналогично, получим те же значения параметра.

Ответ: число 2 есть точка минимума функции
$$y=(2x-a)^6\,(x+a-1)^4 \text{ при } a\in\{-1;\,4\}.$$

18. Дано уравнение $x^3 + 3x^2 + px + q = 0$.

Найдите наибольшее целое значение параметра p, при котором уравнение имеет три различных корня, один из которых равен -1.

Обозначим $f(x) = x^3 + 3x^2 + px + q$.

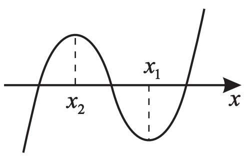
1) $f(-1) = -1 + 3 - p + q = 0$,

тогда $q = p - 2$.

Функция примет вид $f(x) = x^3 + 3x^2 + px + p - 2$.

2) $f'(x) = 3x^2 + 6x + p$.

Для того чтобы функция $y = f(x)$ имела три корня, необходимо (но не достаточно), чтобы уравнение $f'(x) = 0$ имело два различных корня.



$f'(x_1) = 0$; $f'(x_2) = 0$ $(x_1 \neq x_2)$.

Рассмотрим $3x^2 + 6x + p = 0$;

$D = 9 - 3p > 0$; $p < 3$.

$p = 2$ – наибольшее подходящее целое число.

Так как достаточности нет, то проверим $p = 2$.

В этом случае уравнение примет вид

$$x^3 + 3x^2 + 2x = 0; \quad x(x^2 + 3x + 2) = 0; \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = -2 \end{array}\right. .$$

Ответ: наибольшее целое значение p, при котором уравнение $x^3 + 3x^2 + px + q = 0$ имеет три различных корня, один из которых равен -1, есть 2.

19. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \sqrt{x-2}+\sqrt{20-x}=a \\ 7\pi - a\pi = \arccos\left(-\dfrac{x}{11}\right) \end{cases}$$ имеет единственное решение?

1) Рассмотрим уравнение $\sqrt{x-2}+\sqrt{20-x}=a$ и найдем значение параметра a, при котором оно имеет единственное решение.

Для этого обозначим $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{20-x}$ и исследуем ее область значений $E(f)$.

Так как $D(f)=[2;20]$, то по сути это нахождение наибольшего и наименьшего значений на отрезке $[2;20]$.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}-\frac{1}{2\sqrt{20-x}}=\frac{\sqrt{20-x}-\sqrt{x-2}}{2\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{20-x}};$$

$f'(x)=0$ при $\sqrt{20-x}=\sqrt{x-2}$; $20-x=x-2$;

$x=11$ – критическая точка.

$f(11)=\sqrt{11-2}+\sqrt{20-11}=6$,

$f(2)=\sqrt{2-2}+\sqrt{20-2}=3\sqrt{2}$;

$f(20)=\sqrt{20-2}+\sqrt{20-20}=3\sqrt{2}$,

т.е. $E(f)=\left[3\sqrt{2};6\right]$.

Тогда только при $a=6$ существует единственное решение $x=11$.

2) Рассмотрим уравнение $7\pi - a\pi=\arccos\left(-\dfrac{x}{11}\right)$.

Так как $0\leqslant \arccos\left(-\dfrac{x}{11}\right)\leqslant\pi$, то $0\leqslant 7\pi-a\pi\leqslant\pi$;

$-7\pi\leqslant -a\pi\leqslant -6\pi$, тогда $7\geqslant a\geqslant 6$.

Так как первое уравнение имеет единственное решение при $a=6$, то $a=6$ подходит и для второго уравнения, при условии, что его корнем будет $x=11$.

Проверим это. При $a = 6$ второе уравнение примет вид

$7\pi - 6\pi = \arccos\left(-\frac{x}{11}\right)$; $\quad \pi = \pi - \arccos\frac{x}{11}$;

$\arccos\frac{x}{11} = 0$; $\quad \frac{x}{11} = 1$; $\quad x = 11$.

Система имеет единственное решение, так как первое и второе уравнения имеют единственное решение, и эти решения совпадают.

Ответ: система $\begin{cases} \sqrt{x-2} + \sqrt{20-x} = a \\ 7\pi - a\pi = \arccos\left(-\frac{x}{11}\right) \end{cases}$ имеет единственное решение при $a = 6$.

Примечания.

1. Так как $y(x) = \arccos x$ – строго монотонная функция, то второе уравнение имеет только один корень.

2. Решать задачу можно было, сравнивая области изменения функций.

$y = f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{20-x}$ – $E(f) = \left[3\sqrt{2}; 6\right]$;

$y = g(x) = 7 - \frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{x}{11}\right)$ – $E(g) = [6; 7]$.

Тогда $E(f) \cap E(g) = \{6\}$. Значит, подходит только $a = 6$ при $x = 11$.

20. Найдите все значения параметра p, при которых уравнения $(2p+3)x^2 + (p+3)x + 1 = 0$ и $\frac{2x+1}{21-p} = \frac{1}{\sqrt{x-3}+3}$ имеют одинаковое число решений.

I способ

1) Проанализируем уравнение $\frac{2x+1}{21-p} = \frac{1}{\sqrt{x-3}+3}$.

а) $D(y) = [3; \infty)$. Тогда так как при этом $2x + 1 > 0$ и $\sqrt{x-3} + 3 > 0$, то $21 - p > 0$, т. е. $p < 21$.

б) На основании свойств пропорции преобразуем исходное уравнение. Получим равносильное уравнение $(2x+1)\left(\sqrt{x-3}+3\right)=21-p$.

Попробуем оценить границы изменения левой части уравнения на $[3;\infty)$:

$x\geqslant 3$; $2x\geqslant 6$; $2x+1\geqslant 7$. $\sqrt{x-3}\geqslant 0$; $\sqrt{x-3}+3\geqslant 3$.

Воспользуемся свойствами действий над неравенствами (если $\left.\begin{matrix} a>b>0 \\ m>n>0 \end{matrix}\right| \Rightarrow am>bn$), тогда

$(2x+1)\left(\sqrt{x-3}+3\right)\geqslant 3\cdot 7$, значит, учитывая, что

$(2x+1)\left(\sqrt{x-3}+3\right)=21-p$ следует

$21-p\geqslant 21\Rightarrow p\leqslant 0$.

2) Пусть $\varphi(x)=2x+1$ – возрастающая функция;

$g(x)=\sqrt{x-3}+3$ – возрастающая функция.

По свойствам действий с монотонными функциями $f(x)=\varphi(x)\cdot g(x)$ – возрастающая функция, а это означает, что каждое свое значение она принимает только один раз.

Вывод: уравнение $(2x+1)\left(\sqrt{x-3}+3\right)=21-p$ имеет единственное решение. Значит, и $\frac{2x+1}{21-p}=\frac{1}{\sqrt{x-3}+3}$ при $p<0$ имеет единственное решение.

3) Рассмотрим случаи, когда уравнение $(2p+3)x^2+(p+3)x+1=0$ имеет один корень при $p\leqslant 0$.

а) $2p+3=0$; $p=-1{,}5\in(-\infty;0]$.

При этом существует единственный корень $x=-\frac{2}{3}$.

б) $D=(p+3)^2-4(2p+3)=p^2-2p-3=0$;

$\left[\begin{array}{l} p=3\notin(-\infty;0] \\ p=-1\in(-\infty;0] \end{array}\right.$; $p=-1$.

Ответ: при $p \in \{-1{,}5;\ -1\}$ уравнения
$(2p+3)x^2+(p+3)x+1=0$ и $\frac{2x+1}{21-p}=\frac{1}{\sqrt{x-3}+3}$
имеют одинаковое количество решений (одно).

II способ (графический)

1) Рассмотрим уравнение $\frac{2x+1}{21-p}=\frac{1}{\sqrt{x-3}+3}$ на $[3;\infty)$.

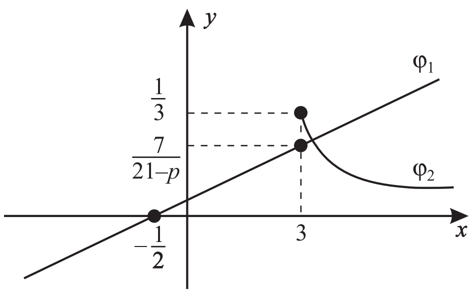
Пусть $\varphi_1(x)=\frac{2x+1}{21-p}$, график $\varphi_1(x)$ – прямая;

$\varphi_2(x)=\frac{1}{\sqrt{x-3}+3}$, $\varphi_2(x)$ – убывающая функция (так как $y=\sqrt{x-3}+3$ – возрастающая).

Если $(x\to\infty)$, то $(\varphi_2(x)\to 0)$. При $x=3$ $\varphi_2(3)=\frac{1}{3}$.

$\varphi_1(x)=0$ при $x=-\frac{1}{2}$.

Необходимо, чтобы график функции $\varphi_1(x)$ пересекал график функции $\varphi_2(x)$.



$\begin{cases}\varphi_1(3)\leqslant\frac{1}{3}\\ \frac{2}{21-p}>0\end{cases}$, т. е. $\begin{cases}\frac{2\cdot 3+1}{21-p}\leqslant\frac{1}{3}\\ 21-p>0\end{cases}$; $\begin{cases}21\leqslant 21-p\\ 21-p>0\end{cases}$; $p\leqslant 0$.

Значит, при $p\leqslant 0$ существует единственное решение.

2) Уравнение $(2p+3)x^2+(p+3)x+1=0$ имеет единственный корень, если:

а) $2p+3=0$; $p=-1{,}5$, значит $x=-\frac{2}{3}$ (решение есть).

б) $D=0$; $D=(p+3)^2-4(2p+3)=p^2-2p-3=0$;

$$\left[\begin{array}{l} p=3\notin(-\infty;\,0] \\ p=-1\in(-\infty;\,0] \end{array}\right..$$

Ответ: при $p\in\{-1{,}5;\,-1\}$ оба уравнения имеют одинаковое число решений, в данном случае одно.

21. Сколько решений имеет уравнение $\sin^3 x+\cos^3 x=a$ в зависимости от значения параметра a на $\left[\frac{\pi}{2};\,\frac{5\pi}{4}\right]$?

1) Пусть $f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x=$

$=(\sin x+\cos x)\left(\sin^2 x-\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x\right)=$

$=(\sin x+\cos x)\left((\sin x+\cos x)^2-3\sin x\cdot\cos x\right)$.

В этом рассуждении мы использовали тождество $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$.

Положим $\sin x+\cos x=t$, тогда $(\sin x+\cos x)^2=t^2$;

$\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x=t^2$; $2\sin x\cdot\cos x=t^2-1$.

Значит $\sin x\cdot\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

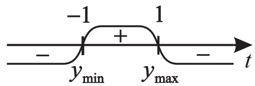
Тогда $f(t)=t\left(t^2-\frac{3}{2}\left(t^2-1\right)\right)=\frac{1}{2}t\left(3-t^2\right)$, поэтому

$\frac{1}{2}\left(3t-t^3\right)=a$.

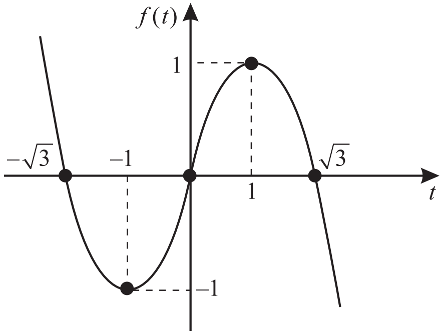
Исследуем функцию $f(t)=\frac{1}{2}\left(3t-t^3\right)$ и по эскизу графика решим вопрос о количестве решений с учетом условия $x\in\left[\frac{\pi}{2};\,\frac{5\pi}{4}\right]$.

2) а) $f(t)=0$; $\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\sqrt{3} \\ t=-\sqrt{3} \end{array}\right.$.

б) $f'(t)=\frac{1}{2}\left(3-3t^2\right)=\frac{3}{2}(1-t)(1+t)$.

в) 

г) $f_{min} = f(-1) = \frac{1}{2}(-3+1) = -1$; $f_{max} = f(1) = \frac{1}{2}(3-1) = 1$.



3) Исследуем $t(x) = \sin x + \cos x$.

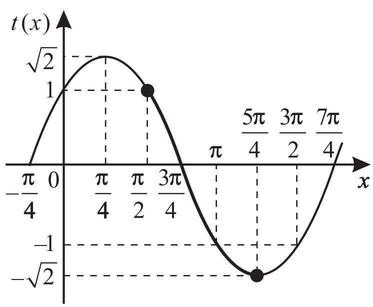
а) Так как $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) =$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$,

то $-\sqrt{2} \leqslant t = \sin x + \cos x \leqslant \sqrt{2}$.

б) Теперь рассмотрим $t(x) = \sqrt{2}\left(\sin x + \frac{\pi}{4}\right)$ на $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}\right]$.

График – $t(x)$ это синусоида, сдвинутая влево на $\frac{\pi}{4}$ и растянутая вдоль оси ординат в $\sqrt{2}$ раз.

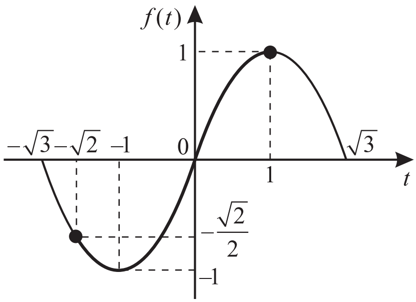


Таким образом, на $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}\right]$ $t(x)$ монотонна, т. е. каждое свое значение принимает только один раз.

$$t_{\text{наиб}} = t\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1;$$

$$t_{\text{наим}} = t\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{2} = -\sqrt{2}.$$

4) Значит $f(t)$ при $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}\right]$ имеет следующий график.



$$f(-\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\cdot\left(3\cdot(-\sqrt{2}) - (-\sqrt{2})^3\right) = \frac{1}{2}\cdot(-3\sqrt{2}+2\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5) Исследуем $f(t) = \frac{1}{2}t(3-t^2)$.

Для $t \in [-\sqrt{2}; 1]$ с точки зрения числа точек пересечения с прямой $y = a$:

а) при $a = -1$ существует единственная точка пересечения относительно t, а значит и относительно x;

б) при $a \in \left(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ существуют две точки пересечения относительно t, а значит и относительно x;

в) при $a \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$ существует единственная точка пересечения относительно t, а значит и относительно x.

Ответ: уравнение $\sin^3 x + \cos^3 x = a$ на $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}\right]$ имеет:

1) при $a = -1$ единственный корень;

2) при $a \in \left(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ два корня;

3) при $a \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$ единственный корень;

4) при $a \in (-\infty; -1)$ корней нет;

5) при $a \in (1; \infty)$ корней нет.

Примечания.

1. Если уравнение будет определено на $[0; 2\pi]$, то исследование станет существенно сложнее.

2. Вопрос задачи может быть сформулирован иначе. Например: при каких значениях параметра a на $[\varphi_0; \varphi_0 + \pi]$ (где φ_0 – любой фиксированный угол) существует единственное решение, два решения, нет решений?

Тренировочная работа 9

1. При каких значениях параметра a угол между касательными к графику кривой $y = 2x^2 - 3ax - 2a^2$, проходящими через точки пересечения графика кривой с осью абсцисс, равен $90°$?

2. Сторона прямоугольника, лежащая на оси абсцисс, равна a, концы же параллельной стороны принадлежат параболе $y = -x^2 + 2x + 8$. При каких значениях параметра a площадь прямоугольника будет наибольшей?

3. При каких значениях параметра a касательные к графику кривой $y = -x^2 + 2x + 3$, проходящие через точку $A\left(1; a\right)$, будут взаимно перпендикулярны?

4. Вычислите наименьшую площадь цельной фигуры, ограниченную графиком функции

$f\left(x\right) = x^2 + \left(3k - 2\right) x + 2k^2 - 3k + 1$ и прямыми $y = 0$,

$x = k - 2$, $x = k + 2$.

5. При каких значениях параметра k уравнение $\sqrt{6 - x} + \sqrt{x + 3} = k$ имеет решение?

6. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{7 - x} + \sqrt{x + 2} = ax + 1$ в зависимости от значений параметра a?

7. Сколько корней имеет уравнение $x\sqrt{8 - x^2} = a$ в зависимости от значений параметра a?

8. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{x^2\left(4 - x^2\right)} = t$ в зависимости от параметра t?

9. Сколько корней имеет уравнение $x^3 + 3ax^2 - 9a^2x + 3a = 0$ в зависимости от значения параметра a?

10. Сколько корней имеет уравнение $\dfrac{a}{x^2 - 4} - \dfrac{a}{x^2 + 4x + 4} = x - 2$ в зависимости от значения параметра a?

11. Сколько корней имеет уравнение $\log_2^3 x - 3\log_2^2 x = a$ в зависимости от значения параметра a?

12. Сколько корней имеет уравнение $\log_9\left(a^2 + 4x\right) + \log_3\left(a^2 + x\right) = 0$ в зависимости от значения параметра a?

13. Сколько корней имеет уравнение $\log_9(1 - 4x) + \log_3(x + 3) = \log_3\left(x + 2 - a^2\right)$ в зависимости от значения параметра a?

14. При каких значениях параметра k уравнение $\sqrt{2^x - 1} + \sqrt{2^x + 3} + \sqrt{2^x + 8} = 13 - 2k - k^2$ имеет единственное решение?

15. Найдите корни функции $f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 + \frac{5}{576}(k+1) + 35{,}5$, если касательная к ней, проведенная через точку $x_0 = 2$, параллельна прямой $y = \frac{\sqrt{k+1}}{4}x - 6$.

16. При каких значениях параметра a число 5 является точкой минимума функции $y = (3x - a)^4 (x + a - 2)^6$?

17. При каких значениях параметра α график функции $f(x) = x^2 + 8x \operatorname{ctg} \alpha + 5\cos 2\alpha$ касается прямой $y = -7$, если абсцисса точки касания отрицательна?

18. Найдите все значения параметра α, при которых график функции $f(x) = x^2 - \left(2\sqrt{5}\cos\alpha - 3\right)x - 5\cos 2\alpha$ касается прямой $y = 3x$ в точке с отрицательной ординатой.

19. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \sqrt{x - 3} + \sqrt{5 - x} = a \\ 3\pi - a\pi = \arccos\left(-\frac{x}{4}\right) \end{cases}$$

имеет единственное решение?

20. При каких значениях параметра a площадь фигуры, ограниченной параболой $f(x) = x^2 - 2x + 4$, касательной, проведенной к ней в точке с абсциссой $a \in [0; 3]$, и прямыми $x = 0$, $x = 3$ принимает наибольшее и наименьшее значения?

Решение тренировочной работы 9

1. При каких значениях параметра a угол между касательными к графику кривой $y = 2x^2 - 3ax - 2a^2$, проходящими через точки пересечения графика кривой с осью абсцисс, равен $90°$?

$$y' = 4x - 3a;\ 2x^2 - 3ax - 2a^2 = 0;\ \left[\begin{array}{l} x = 2a \\ x = -\dfrac{a}{2} \end{array}\right.;$$

$y'(2a) = 4 \cdot 2a - 3a = 5a = k_1$ (тангенс угла наклона касательной к оси Ox в точке с абсциссой $x = 2a$);

$y'\left(-\dfrac{1}{2}a\right) = 4\left(-\dfrac{a}{2}\right) - 3a = -5a = k_2$ (тангенс угла наклона касательной к оси Ox в точке с абсциссой $x = -\dfrac{1}{2}a$);

$\operatorname{tg}\Theta = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$. $\Theta = 90°$, только если $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$;

значит $5a = -\dfrac{1}{-5a}$, т.е. $\dfrac{25a^2 - 1}{5a} = 0$; $\left[\begin{array}{l} a = \dfrac{1}{5} \\ a = -\dfrac{1}{5} \end{array}\right.$.

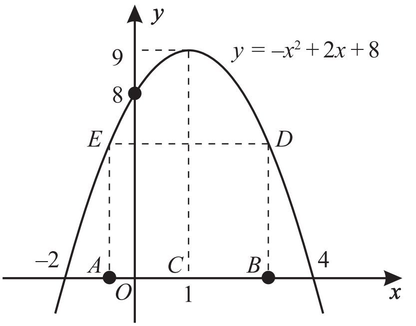
Ответ: при $a = \dfrac{1}{5}$ или $a = -\dfrac{1}{5}$ угол между касательными к графику кривой $y = 2x^2 - 3ax - 2a^2$, проходящими через точки пересечения графика кривой с осью абсцисс, равен $90°$.

2. Сторона прямоугольника, лежащая на оси абсцисс, равна a, концы же параллельной стороны принадлежат параболе $y = -x^2 + 2x + 8$. При каких значениях параметра a площадь прямоугольника будет наибольшей?

1) Рассмотрим график параболы $y = -x^2 + 2x + 8$.

$$y = 0;\ \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2 \end{array}\right.;\ x_0 = -\frac{b}{2a};\quad x_0 = -\frac{2}{2\cdot(-1)} = 1;\quad y_0 = 9.$$

Значит, $x = 1$ – ось симметрии параболы,
т. е. и вписанный прямоугольник симметричен относительно оси $x = 1$.



2) Так как $AB = a$ (по условию), то $CB = \frac{a}{2}$.

Пусть $OB = x$, тогда $x = 1 + \frac{a}{2}$.

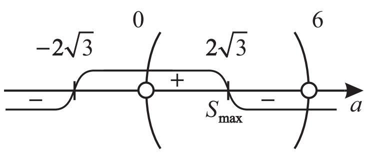
Сторона DB равна

$$y\left(1+\frac{a}{2}\right) = -\left(1+\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(1+\frac{a}{2}\right) + 8 = -\frac{1}{4}a^2 + 9.$$

$S_{ABDE} = AB \cdot DB$; $\quad S(a) = a\left(-\frac{1}{4}a^2 + 9\right)$.

Так как $0 < CB < 3$, то $1 + \frac{a}{2} < 4$ $(a > 0)$ и $2 + a < 8$ $(a < 6)$. Значит, $D(S) = (0; 6)$.

3) Итак, $S'(a) = -\frac{3}{4}a^2 + 9$; $\quad S'(a) = 0$.



$$\left[\begin{array}{l} a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ a = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3} \notin (0; 6) \end{array}\right.$$

В силу непрерывности на $(0; 6)$ и существования единственного экстремума на $(0; 6)$:

$S_{\max} = S_{\text{наиб}} = S\left(2\sqrt{3}\right)$.

Ответ: прямоугольник, соответствующий условиям задачи, имеет наибольшую площадь при $a = 2\sqrt{3}$.

3. При каких значениях параметра a касательные к графику кривой $y = -x^2 + 2x + 3$, проходящие через точку $A\left(1; a\right)$, будут взаимно перпендикулярны?

Пусть $y = kx + b$ – уравнение касательной.

Тогда $\begin{cases} y = kx + b \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases}$;

$kx + b = -x^2 + 2x + 3$; $\quad x^2 + \left(k - 2\right) x + b - 3 = 0$.

Решение должно быть единственным.

$D = \left(k - 2\right)^2 - 4b + 12 = k^2 - 4k - 4b + 16 = 0$.

Итак, $k^2 - 4k - 4b + 16 = 0$; $k_1 = 2 + \sqrt{4b - 12}$; $k_2 = 2 - 2\sqrt{b - 3}$.

Так как касательные взаимно перпендекулярны,

то $k_1 = -\frac{1}{k_2}$; т.е. $2 + 2\sqrt{b - 3} = \frac{1}{-2+2\sqrt{b-3}}$. Тогда

$4\left(\sqrt{b - 3} + 1\right)\left(\sqrt{b - 3} - 1\right) = 1$; $\; 4 \cdot \left(b - 4\right) = 1$; $\; b = 4\frac{1}{4}$.

Тогда $k_1 = 2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5}$ и $k_2 = 2 - \sqrt{5}$.

Пусть l_1 – касательная $y = \left(2 + \sqrt{5}\right) x + 4\frac{1}{4}$.

Так как $A\left(1; a\right) \in \Gamma\left(y = \left(2 + \sqrt{5}\right) x + 4\frac{1}{4}\right)$,

значит $a = \left(2 + \sqrt{5}\right) \cdot 1 + 4\frac{1}{4}$, т.е. $a = 6{,}25 + \sqrt{5}$.

Ответ: при $a = 6{,}25 + \sqrt{5}$ касательные к графику кривой $y = -x^2 + 2x + 3$, проходящие через точку $A\left(1; a\right)$, будут взаимно перпендекулярны.

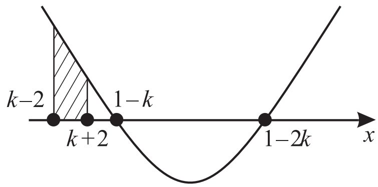
4. Вычислите наименьшую площадь цельной фигуры, ограниченной графиком функции $f\left(x\right) = x^2 + \left(3k - 2\right) x + 2k^2 - 3k + 1$ и прямыми $y = 0$, $x = k - 2$, $x = k + 2$.

1) Из условий задачи следует, что фигура – цельная, без разбиения на части. Найдем корни уравнения $x^2 + \left(3k - 2\right) x + 2k^2 - 3k + 1 = 0$:

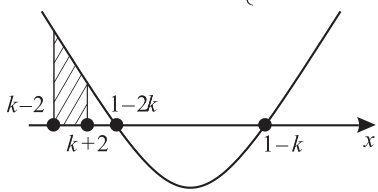
$$x_{1,2} = \frac{2-3k\pm\sqrt{(2-3k)^2-4\left(2k^2-3k+1\right)}}{2} = \frac{2-3k\pm k}{2}; \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 - k \\ x = 1 - 2k \end{array}\right.$$

2) Выясним, при каких значениях параметра k точки на оси абсцисс $k-2$; $1-2k$; $1-k$; $k+2$ расположены в том или ином порядке возрастания.

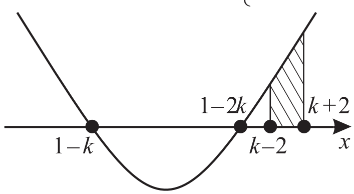
Так как $k-2<k+2$ при любом k, то возможны следующие случаи:

а) 

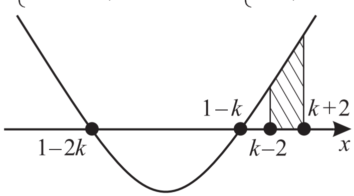
$$\begin{cases} k+2 \leqslant 1-k \\ 1-k \leqslant 1-2k \end{cases}; \quad \begin{cases} k \leqslant -\dfrac{1}{2} \\ k \leqslant 0 \end{cases}; \quad k \leqslant -\frac{1}{2}.$$

б) 

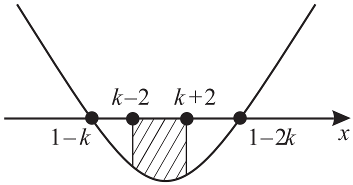
$$\begin{cases} k+2 \leqslant 1-2k \\ 1-2k \leqslant 1-k \end{cases}; \quad \begin{cases} k \leqslant -\dfrac{1}{3} \\ k \geqslant 0 \end{cases}; \quad \varnothing.$$

в) 

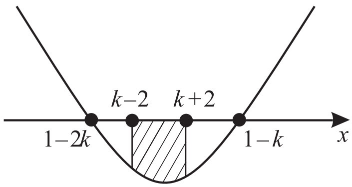
$$\begin{cases} 1-2k \leqslant k-2 \\ 1-k \leqslant 1-2k \end{cases}; \quad \begin{cases} k \geqslant 1 \\ k \leqslant 0 \end{cases}; \quad \varnothing.$$

г) 

$$\begin{cases} 1-k \leqslant k-2 \\ 1-2k \leqslant 1-k \end{cases}; \quad \begin{cases} k \geqslant 1{,}5 \\ k \geqslant 0 \end{cases}; \quad k \geqslant 1{,}5.$$

д) 

$$\begin{cases} k+2 \leqslant 1-2k \\ 1-k \leqslant k-2 \end{cases}; \quad \begin{cases} k \leqslant -\dfrac{1}{3} \\ k \geqslant 1{,}5 \end{cases}; \quad \varnothing.$$

е) 

$$\begin{cases} k+2 \leqslant 1-k \\ 1-2k \leqslant k-2 \end{cases}; \quad \begin{cases} k \leqslant -\dfrac{1}{2} \\ k \geqslant 1 \end{cases}; \quad \varnothing.$$

3) Найдем площадь фигуры при $k \leqslant -\dfrac{1}{2}$ (случай а)).

$$S_ф = \int\limits_{k-2}^{k+2} \left(x^2 + (3k-2)\,x + 2k^2 - 3k + 1\right) dx =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{2}(3k-2)\,x^2 + \left(2k^2 - 3k + 1\right)x\right)\Bigg|_{k-2}^{k+2} =$$

$$= \frac{1}{3}\left((k+2)^3 - (k-2)^3\right) + \frac{1}{2}\,(3k-2)\left((k+2)^2 - (k-2)^2\right) +$$

$$+ \left(2k^2 - 3k + 1\right)\left((k+2) - (k-2)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\,(k+2-k-2)\left((k+2)^2 + (k+2)(k-2) + (k-2)^2\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\,(3k-2)\,8k + 4\left(2k^2 - 3k + 1\right) =$$

$$= \frac{4}{3}\left(3k^2 + 4\right) + 12k^2 - 8k + 8k^2 - 12k + 4 =$$

$$= 24k^2 - 20k + 9\frac{1}{3} = S\,(k).$$

Так как график $S(k)$ – парабола, ветви которой направлены вверх, то $k_0 = \frac{20}{2 \cdot 24} = \frac{5}{12}$ – абсцисса вершины параболы, но $\frac{5}{12} \notin \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.

Значит, на $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ $S(k)$ убывает.

Тогда

$$S_{\text{наим}} = S\left(-\frac{1}{2}\right) = 24 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 20 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 9\frac{1}{3} = 25\frac{1}{3} \text{ (кв. ед.).}$$

4) Рассмотрим случай г) $k \geqslant 1{,}5$.

На этом промежутке

$S(k) = 24k^2 - 20k + 9\frac{1}{3}$.

Так как $\frac{5}{12} \notin [1{,}5; \infty)$, то на $[1{,}5; \infty)$

$S(k)$ возрастает.

Значит, $S_{\text{наим}} = S(1{,}5) = 24 \cdot \frac{9}{4} - 20 \cdot \frac{3}{2} + 9\frac{1}{3} = 33\frac{1}{3}$ (кв. ед.)

Итак, сравнивая все случаи, получим

$S_{\text{наим}} = 25\frac{1}{3}$ при $k = -\frac{1}{2}$.

Ответ: наименьшая площадь цельной фигуры, ограниченной графиком функции

$f(x) = x^2 + (3k - 2)x + 2k^2 - 3k + 1$

и прямыми $y = 0$, $x = k - 2$, $x = k + 2$ равна

$25\frac{1}{3}$ кв. ед. при $k = -\frac{1}{2}$.

5. При каких значениях параметра k уравнение

$\sqrt{6-x}+\sqrt{x+3}=k$ имеет решение?

$\sqrt{6-x}+\sqrt{x+3}=k$, очевидно, что $k \geqslant 0$. Выясним, при каких значениях параметра k уравнение имеет решение.

$D\left(y\right)=\left[-3;\ 6\right]$.

а) $6-x+2\sqrt{-x^2+3x+18}+x+3=k^2$;

$k^2-9 \geqslant 0$ и $k \geqslant 0$, значит $k \geqslant 3$;

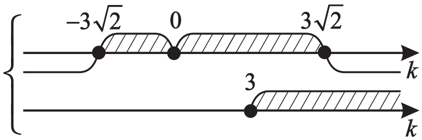
$2\sqrt{-x^2+3x+18}=k^2-9$;

$4\left(-x^2+3x+18\right)=\left(k^2-9\right)^2$;

$k^4-18k^2+81+4x^2-12x-72=0$;

$4x^2-12x+k^4-18k^2+9=0$;

$D=36-4k^4+72k^2-36=-4k^2\left(k^2-18\right)$.



$k \in \left[3;\ 3\sqrt{2}\right]$.

б) Возможен другой способ.

Пусть $y=\sqrt{6-x}+\sqrt{x+3}$;

$$y'=\frac{-1}{2\sqrt{6-x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+3}}=\frac{\sqrt{6-x}-\sqrt{x+3}}{2\sqrt{6-x}\cdot\sqrt{x+3}};$$

$y'=0$; $\sqrt{6-x}=\sqrt{x+3}$;

$6-x=x+3$; значит $x=1{,}5 \in \left[-3;\ 6\right]=D\left(y\right)$.

$f\left(1{,}5\right)=\sqrt{6-1{,}5}+\sqrt{1{,}5+3}=2\sqrt{4{,}5}=3\sqrt{2}$;

$f\left(-3\right)=\sqrt{6-\left(-3\right)}+\sqrt{3-3}=3$;

$f\left(6\right)=\sqrt{6-6}+\sqrt{6+3}=3$.

x	-3	$1{,}5$	6
y	3	$3\sqrt{2}$	3

$y_{\text{наиб}}=3\sqrt{2}$;

$y_{\text{наим}}=3$.

Тем самым вычислили значения функции в точке экстремума и на концах области определения.

Значит $E\left(y\right)=\left[3;\,3\sqrt{2}\,\right]$, так как функция непрерывна.

Ответ: уравнение $y=\sqrt{6-x}+\sqrt{x+3}$ имеет решение

при $k\in\left[3;\,3\sqrt{2}\,\right]$.

6. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{7-x}+\sqrt{x+2}=ax+1$ в зависимости от значений параметра a?

Построим эскиз графика.

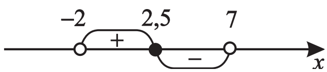
$f\left(x\right)=\sqrt{7-x}+\sqrt{x+2}$; $\quad D\left(f\right)=\left[-2;\,7\right]$;

$$f'\left(x\right)=\frac{-1}{2\sqrt{7-x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+2}}=\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{x+2}}{2\cdot\sqrt{7-x}\cdot\sqrt{x+2}};$$

$\left(D\left(f'\right)=\left(-2;\,7\right)\right)$

$y'\geqslant 0$; $\sqrt{7-x}\geqslant\sqrt{x+2}$; $7-x\geqslant x+2$; $-2<x\leqslant 2{,}5$;

$y'\leqslant 0$; $\sqrt{7-x}\leqslant\sqrt{x+2}$; $7-x\leqslant x+2$; $2{,}5\leqslant x<7$.



$f\left(2{,}5\right)=y_{\max}=\sqrt{7-2{,}5}+\sqrt{2{,}5+2}=2\sqrt{4{,}5}=3\sqrt{2}$;

$f\left(-2\right)=\sqrt{7+2}+\sqrt{-2+2}=3$;

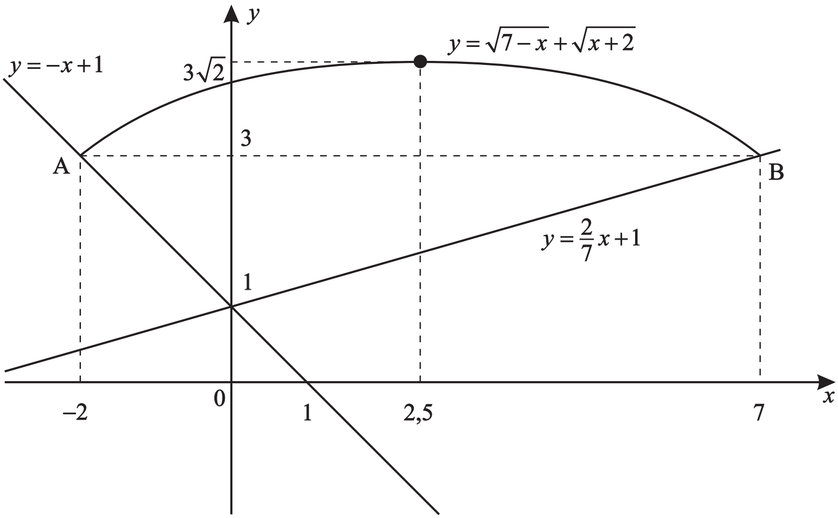
$f\left(7\right)=\sqrt{7-7}+\sqrt{7+2}=3$;

$f\left(0\right)=\sqrt{7}+\sqrt{2}$.

$A\left(-2;\,3\right)$; $B\left(7;\,3\right)$

$A\in\Gamma\left(y=ax+1\right)$; $\quad 3=-2a+1$; $a=-1$,
значит $y=-x+1$;

$B\in\Gamma\left(y=ax+1\right)$; $\quad 3=7a+1$; $\quad a=\dfrac{2}{7}$;
значит $y=\dfrac{2}{7}x+1$.



Из графика можно сделать выводы и получить ответ.

Ответ: в уравнении $\sqrt{7-x}+\sqrt{x+2}=ax+1$

1) при $a \in \left[\frac{2}{7}; \infty\right)$ существует один корень;

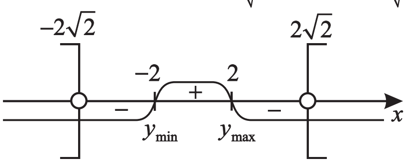
2) при $a \in \left(-\infty; -1\right]$ существует один корень;

3) при $a \in \left(-1; \frac{2}{7}\right)$ корней нет.

7. Сколько корней имеет уравнение $x\sqrt{8-x^2}=a$ в зависимости от значений параметра a?

Пусть $y=f\left(x\right)=x\sqrt{8-x^2}$; $D\left(f\right)=\left[-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right]$;

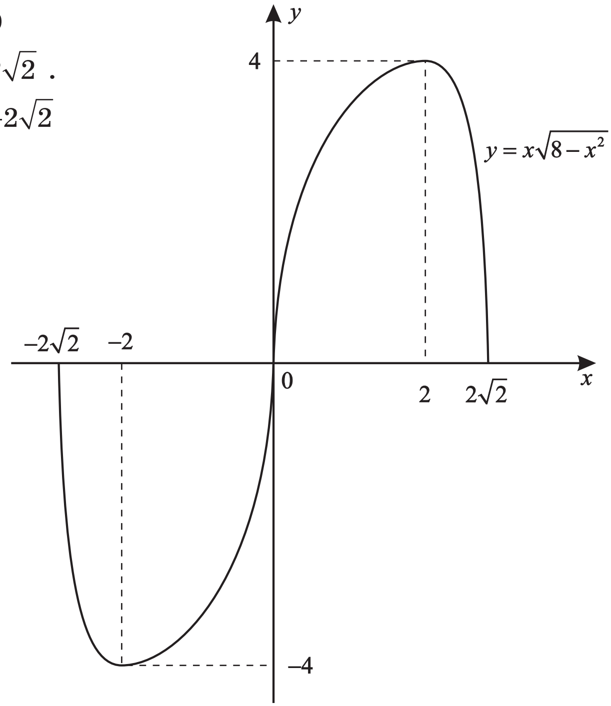
$$y'=1\cdot\sqrt{8-x^2}+\frac{x\cdot(-2x)}{2\sqrt{8-x^2}}=\frac{8-x^2-x^2}{\sqrt{8-x^2}}=\frac{2\left(4-x^2\right)}{\sqrt{8-x^2}}.$$



$y_{\min} = y\left(-2\right) = -2\sqrt{8-4} = -4;$

$y_{\max} = y\left(2\right) = 2\sqrt{8-4} = 4;$

$y = 0;\quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2\sqrt{2} \\ x = -2\sqrt{2} \end{array}\right.$.



Из эскиза графика следуют ответы на вопросы.

Ответ: уравнение $x\sqrt{8-x^2} = a$ имеет

1) при $a = 4$ один корень;

2) при $a \in \left(0;\, 4\right)$ два корня;

3) при $a = 0$ три корня;

4) при $a \in \left(-4;\, 0\right)$ два корня;

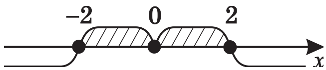
5) при $a = -4$ один корень;

6) при $a \in \left(-\infty;\, -4\right) \cup \left(4;\, \infty\right)$ решений нет.

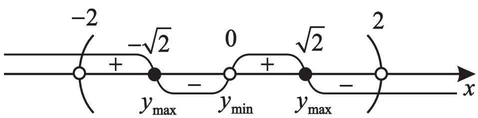
8. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{x^2\left(4-x^2\right)}=t$ в зависимости от параметра t?

Пусть $y=\sqrt{x^2\left(4-x^2\right)}$.

$D\left(y\right)=\left[-2;\ 2\right]$;



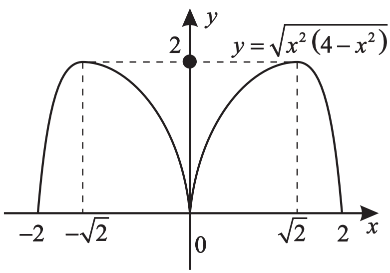
$$y'=\frac{8x-4x^3}{2\sqrt{x^2\left(4-x^2\right)}}=\frac{4x\left(2-x^2\right)}{2\sqrt{x^2\left(4-x^2\right)}};$$



$y_{\max}=y\left(-\sqrt{2}\right)=\sqrt{2\left(4-2\right)}=2$;

$y_{\min}=y\left(0\right)=0$;

$y_{\max}=y\left(\sqrt{2}\right)=2$.



Из эскиза графика получим ответ.

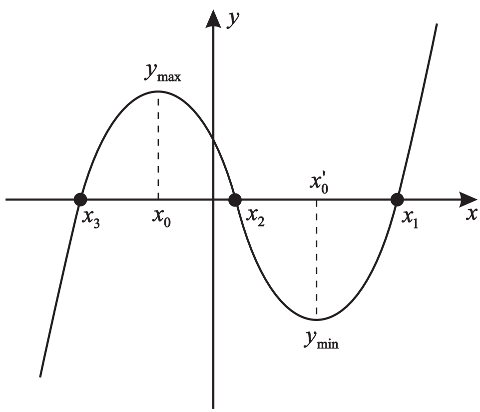
Ответ: уравнение $\sqrt{x^2\left(4-x^2\right)}=t$ имеет

1) при $t=2$ два корня;
2) при $t\in\left(0;\ 2\right)$ четыре корня;
3) при $t=0$ три корня;
4) при $t\in\left(-\infty;\ 0\right)\cup\left(2;\ \infty\right)$ нет решений.

9. Сколько корней имеет уравнение
$x^3 + 3ax^2 - 9a^2x + 3a = 0$ в зависимости от значения параметра a?

$$y' = 3x^2 + 6ax - 9a^2; \quad y' = 0; \quad \left[\begin{array}{l} x = -3a \\ x = a \end{array}\right. .$$

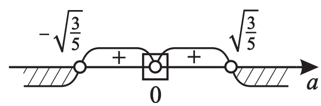
1) Для того чтобы было три корня, необходимо и достаточно, чтобы $y_{\max} \cdot y_{\min} < 0$.



Значит $y(a) \cdot y(-3a) < 0$;

$$\left(a^3 + 3a^3 - 9a^3 + 3a\right)\left(-27a^3 + 27a^3 + 27a^3 + 3a\right) < 0;$$

$$+a\left(3 - 5a^2\right) \cdot 3a\left(1 + 9a^2\right) < 0.$$

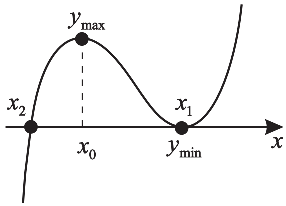


Следовательно, при $a \in \left(-\infty; -\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{3}{5}}; \infty\right)$ имеем три корня.

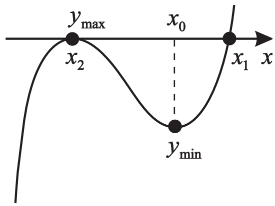
2) Для того чтобы было два корня, необходимо и достаточно, чтобы $y_{\min} \cdot y_{\max} = 0$.

Значит $\left[\begin{array}{l} y_{\min} = 0 \\ y_{\max} = 0 \end{array}\right.$, т.е.

а) $y_{\min} = 0$



б) $y_{\max} = 0$



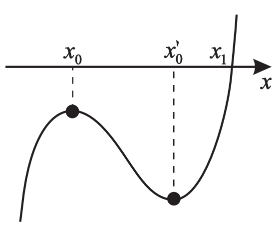
$$\left[\begin{array}{l} 3a\left(3-5a^2\right)=0 \\ a\left(1+9a^2\right)=0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} a=\sqrt{\dfrac{3}{5}} \\ a=-\sqrt{\dfrac{3}{5}} \\ a=0 \end{array}\right..$$

При $a = 0$ функция $y = x^3$ возрастающая,
т.е. имеется только один корень.

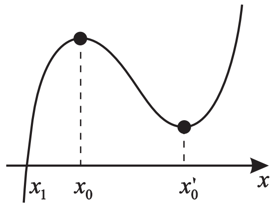
3) Для того чтобы был только один корень, достаточно $y_{\min} \cdot y_{\max} > 0$. (Или функция должна быть строго монотонная на $D\left(f\right)$, т.е. $y' > 0$ или $y' < 0$. В данном случае это не так.)

Значит $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y_{\min} < 0 \\ y_{\max} < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y_{\min} > 0 \\ y_{\max} > 0 \end{cases} \end{array}\right..$

а) $\begin{cases} y_{\min} < 0 \\ y_{\max} < 0 \end{cases}$

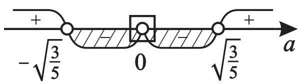


б) $\begin{cases} y_{\min} > 0 \\ y_{\max} > 0 \end{cases}$



Следовательно, иллюстрируя $y_{\min} \cdot y_{\max} > 0$, имеем

$a\left(3 - 5a^2\right) \cdot 3a\left(1 + 9a^2\right) > 0$; $3a^2\left(9a^2 + 1\right)\left(5a^2 - 3\right) < 0$.



$a \in \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}; 0\right) \cup \left(0; \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$.

Ответ: уравнение $x^3 + 3ax^2 - 9a^2x + 3a = 0$ имеет

1) при $a \in \left(-\infty; -\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{3}{5}}; \infty\right)$ три корня;

2) при $a \in \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}; \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ один корень;

3) при $a \in \left\{-\sqrt{\frac{3}{5}}; \sqrt{\frac{3}{5}}\right\}$ два корня.

10. Сколько корней имеет уравнение $\frac{a}{x^2-4} - \frac{a}{x^2+4x+4} = x - 2$ в зависимости от значения параметра a?

$D(y)$: $x \neq \pm 2$.

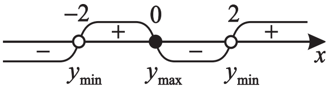
$\frac{a}{x^2-4} - \frac{a}{x^2+4x+4} = \frac{a\left((x+2)-(x-2)\right)}{(x-2)(x+2)^2} = \frac{4a}{(x-2)(x+2)^2}$, тогда

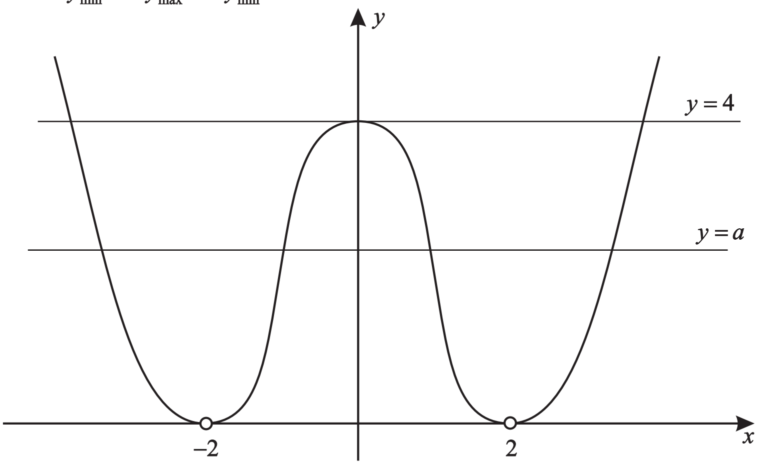
$\frac{4a}{(x-2)(x+2)^2} = (x - 2)$;

$a = \frac{1}{4}(x-2)^2(x+2)^2$ при $x \neq \pm 2$.

Далее исследования проведём, используя эскиз графика $y = \frac{1}{4}(x-2)^2(x+2)^2$.

$$y' = \left(\frac{1}{4}\left(x^2 - 4\right)^2\right)' = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \left(x^2 - 4\right) \cdot 2x = x\left(x - 2\right)\left(x + 2\right);$$





$y\left(0\right) = 4$; $y\left(2\right) = 0$; $y\left(-2\right) = 0$.

Учитывая, что в уравнении $x \neq \pm 2$, запишем результат исследования.

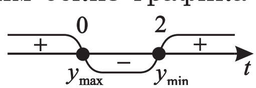
Ответ: уравнение $\dfrac{a}{x^2-4} - \dfrac{a}{x^2+4x+4} = x - 2$ имеет

1) при $a > 4$ два корня;
2) при $a = 4$ три корня;
3) при $a \in \left(0; 4\right)$ четыре корня;
4) при $a \leqslant 0$ корней нет.

11. Сколько корней имеет уравнение $\log_2^3 x - 3\log_2^2 x = a$ в зависимости от значения параметра a?

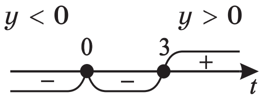
Пусть $\log_2 x = t$. Построим эскиз графика $y = t^3 - 3t^2$.

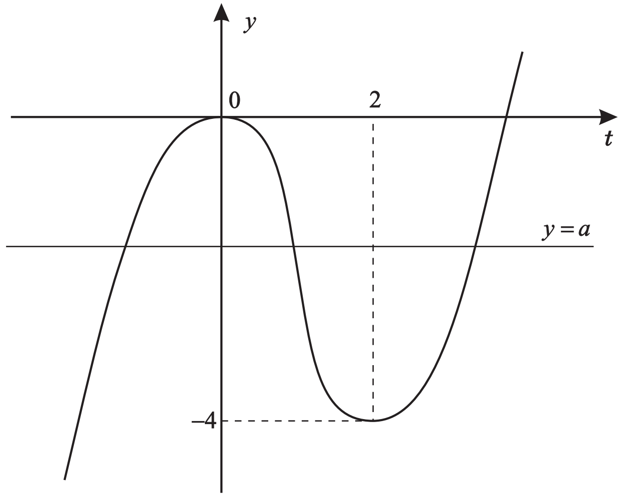
$y' = 3t^2 - 6t = 3t\left(t - 2\right)$;



$y_{max}\left(0\right) = 0$; $y_{min}\left(2\right) = -4$; $y = 0$ $\left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 3 \end{array}\right.$.

Выясним интервалы знакопостоянства.





Так как $t(x)=\log_2 x$ строго монотонная функция, то каждое своё значение она принимает только один раз. Анализируя эскиз графика, получаем ответ.

Ответ: уравнение $\log_2^3 x-3\log_2^2 x=a$ имеет

1) при $a>0$ один корень;
2) при $a=0$ два корня;
3) при $a\in(-4;\,0)$ три корня;
4) при $a=-4$ два корня;
5) при $a<-4$ один корень.

12. Сколько корней имеет уравнение $\log_9\left(a^2+4x\right)+\log_3\left(a^2+x\right)=0$ в зависимости от значения параметра a?

$$\left(a^2+x\right)\sqrt{a^2+4x}=1;\qquad D(y):\ \begin{cases} x>-a^2 \\ x>-\dfrac{1}{4}a^2 \end{cases};\quad x>-\frac{1}{4}a^2;$$

$$y' = \left(\left(a^2 + x\right)\sqrt{a^2 + 4x}\right)' = \sqrt{a^2 + 4x} + \frac{\left(a^2+x\right)\cdot 4}{2\sqrt{a^2+4x}} =$$

$$= \frac{a^2+4x+2a^2+2x}{\sqrt{a^2+4x}} = \frac{3a^2+6x}{\sqrt{a^2+4x}} = \frac{3\left(a^2+2x\right)}{\sqrt{a^2+4x}}.$$

Так как $x > -\frac{1}{4}a^2$, то $2x > -\frac{1}{2}a^2$, значит $y' > 0$ при любых $x \in D\left(y\right)$.

Значит функция $y = \left(a^2 + x\right)\sqrt{a^2 + 4x}$ строго монотонно возрастающая. Как известно, строго монотонные функции принимают любое своё значение только один раз.

Учтя, что $y = \log_3 x$ тоже строго монотонная, приходим к выводу, что данное уравнение имеет при любых значениях параметра a единственный корень.

Ответ: уравнение $\log_9\left(a^2 + 4x\right) + \log_3\left(a^2 + x\right) = 0$ имеет единственное решение при любых значениях параметра a.

Примечание. Учитывая $D\left(y\right)$, получим:

а) если $x \to \left(-\frac{a^2}{4} + 0\right)$, то $\log_3\left(a^2 + x\right)\sqrt{a^2 + 4x} \to -\infty$;

б) если $x \to \infty$, то $\log_3\left(a^2 + x\right)\sqrt{a^2 + 4x} \to +\infty$.

Значит, в силу непрерывности $y = \log_3\left(a^2 + x\right)\sqrt{a^2 + 4x}$ корень существует.

13. Сколько корней имеет уравнение
$\log_9\left(1 - 4x\right) + \log_3\left(x + 3\right) = \log_3\left(x + 2 - a^2\right)$
в зависимости от значения параметра a?

$$\log_9\left(1 - 4x\right) + \log_3\left(x + 3\right) = \log_3\left(x + 2 - a^2\right);$$

$$\log_3\left(\sqrt{1 - 4x}\left(x + 3\right)\right) = \log_3\left(x + 2 - a^2\right).$$

Попробуем решить этот вопрос графически.

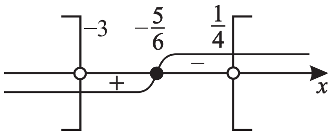
Построим график $y_2 = (x+3)\sqrt{1-4x}$.

а) $D(y)$; $\begin{cases} x < \dfrac{1}{4} \\ x > -3 \end{cases}$;

б) $y_2 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{4} \\ x = -3 \end{array}\right.$; $x = 0$; $y_2 = 3$;

в) $(y_2)' = \dfrac{-4(x+3)}{2\sqrt{1-4x}} + \sqrt{1-4x} = \dfrac{-2x-6+\left(\sqrt{1-4x}\right)^2}{\sqrt{1-4x}} =$

$= \dfrac{-2x-6+1-4x}{\sqrt{1-4x}} = -\dfrac{6x+5}{\sqrt{1-4x}}$;



$(y_2)_{\max} = y_2\left(-\dfrac{5}{6}\right) = \dfrac{13}{18}\sqrt{39}$;

г) прямая $y_1 = x + 2 - a^2$ имеет вид $y_1 = x - \dfrac{1}{4}$, если

проходит через точку $A\left(\dfrac{1}{4}; 0\right)$;

д) прямая $y_1 = x + 2 - a^2$ имеет вид $y_1 = x + 3$, если проходит через точку $B(-3; 0)$.

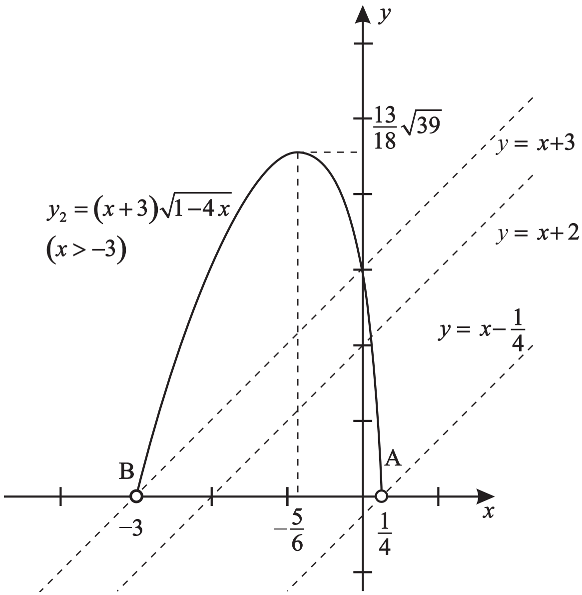
Значит $\begin{cases} 2 - a^2 < 3 \\ 2 - a^2 > -\dfrac{1}{4} \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} a^2 > -1 \\ a^2 < \dfrac{9}{4} \end{cases}$;

тогда $a \in (-1{,}5; 1{,}5)$;

е) из эскиза графика очевидно, что при

$a \in (-1{,}5; 1{,}5)$ есть только одна точка пересечения

$y_1 = x + 2 - a^2$ и $y_2 = (x+3)\sqrt{1-4x}$.



Ответ: при $a \in (-1{,}5;\ 1{,}5)$ существует один корень уравнения
$\log_9(1-4x) + \log_3(x+3) = \log_3\left(x+2-a^2\right)$, при других значениях параметра a корней нет.

14. При каких значениях параметра k уравнение
$\sqrt{2^x - 1} + \sqrt{2^x + 3} + \sqrt{2^x + 8} = 13 - 2k - k^2$ имеет единственное решение?

1) Пусть $y_1(x) = 2^x - 1$.

Учтем, что $y_1(x)$ – строго возрастающая.

Тогда:

а) $g_1(x) = \sqrt{2^x - 1}$ – строго возрастающая функция;

б) $g_2(x) = \sqrt{2^x + 3}$ – строго возрастающая функция;

в) $g_3(x) = \sqrt{2^x + 8}$ – строго возрастающая функция.

Значит $f(x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x)$ – строго возрастающая функция. Так как $y = f(x)\uparrow$, то уравнение $f(x) = 13 - 2k - k^2$ имеет единственное решение в силу того, что строго монотонная функция каждое свое значение принимает только один раз.

2) Пусть $t = 2^x - 1$, но $D(y)$: $t \geqslant 0$.

Уравнение примет вид

$\sqrt{t} + \sqrt{t+4} + \sqrt{t+9} = 13 - 2k - k^2$.

Так как $t = 0$ – наименьшее значение t,

то $f_{\text{наим}}(t) = \sqrt{t} + \sqrt{t+4} + \sqrt{t+9} = f(0)$,

т.е. $f_{\text{наим}} = \sqrt{0} + \sqrt{0+4} + \sqrt{0+9} = 5$.

Чтобы было решение, необходимо $13 - 2k - k^2 \geqslant 5$.

$k^2 - 2k - 8 \leqslant 0$, т.е. $k \in [-2; 4]$.

Ответ: при $k \in [-2; 4]$ уравнение
$\sqrt{2^x - 1} + \sqrt{2^x + 3} + \sqrt{2^x + 8} = 13 - 2k - k^2$ имеет единственный корень.

15. Найдите корни функции $f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 + \frac{5}{576}(k+1) + 35{,}5$, если касательная к ней, проведенная через точку $x_0 = 2$, параллельна прямой $y = \frac{\sqrt{k+1}}{4}x - 6$.

Так как значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту прямой касания, параллельной $y = \frac{\sqrt{k+1}}{4}x - 6$, то $f'(2) = \frac{\sqrt{k+1}}{4}$.

Учитывая, что $f'(x) = 3x^2 - 3x$, получим

$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = \frac{\sqrt{k+1}}{4}$; $\sqrt{k+1} = 24$; $k = 575$.

Функция будет иметь вид

$f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 + \frac{5}{576}(575 + 1) + 35{,}5$;

$f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 + 40{,}5$.

Решим уравнение $f(x)=0$; $x^3-1{,}5x^2+40{,}5=0$;
$2x^3-3x^2+81=0$.

Имея в виду делители числа 81, которые могут быть целыми корнями уравнения, подберем корень $x=-3$.

Разделим:
$$\begin{array}{r|l} 2x^3-3x^2\qquad\quad+81 & \;x+3 \\ \cline{2-2} \underline{2x^3+6x^2}\qquad\qquad\quad & 2x^2-9x+27 \\ -9x^2\qquad+81 & \\ -\underline{9x^2-27x}\quad & \\ 27x+81 & \\ \underline{27x+81} & \end{array}$$

Других корней нет, так как для получившегося многочлена $D<0$.

Ответ: функция $f(x)=x^3-1{,}5x^2+\frac{5}{576}(k+1)+35{,}5$ имеет единственный корень $x=-3$, если касательная к функции в $x_0=2$ параллельна прямой $y=\frac{\sqrt{k+1}}{4}x-6$ (при $k=575$).

16. При каких значениях параметра a число 5 является точкой минимума функции $y=(3x-a)^4\,(x+a-2)^6$?

$y'=4\cdot 3\,(3x-a)^3(x+a-2)^6+6(x+a-2)^5\,(3x-a)^4=$

$=6\,(3x-a)^3(x+a-2)^5(5x+a-4)$.

$$y'=0;\quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{a}{3} \\ x=2-a \\ x=\frac{4-a}{5} \end{array}\right. \text{ – критические точки.}$$

Выясним, при каких a они совпадают.

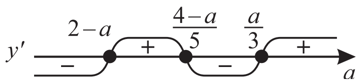
а) $\dfrac{a}{3} = 2 - a$; $\quad a = \dfrac{3}{2}$;

б) $\dfrac{a}{3} = \dfrac{4-a}{5}$; $\quad a = \dfrac{3}{2}$;

в) $2 - a = \dfrac{4-a}{5}$; $\quad a = \dfrac{3}{2}$.

Значит из совпадения двух критических точек следует совпадение и с третьей критической точкой.

1) Пусть $a > \dfrac{3}{2}$. Тогда $2 - a < \dfrac{4-a}{5} < \dfrac{a}{3}$.



$y_{\min} = y\left(2 - a\right)$, значит $2 - a = 5$; $\quad a = -3$;

$y_{\min} = y\left(\dfrac{a}{3}\right)$, значит $\dfrac{a}{3} = 5$; $\quad a = 15$.

2) Пусть $a < \dfrac{3}{2}$. Тогда $\dfrac{a}{3} < \dfrac{4-a}{5} < 2 - a$.

Далее, рассуждая аналогично, получим те же значения параметра a.

Ответ: число 5 есть точка минимума функции

$$y = \left(3x - a\right)^4 \left(x + a - 2\right)^6 \text{ при } a \in \{-3; 15\}.$$

17. При каких значениях параметра α график функции $f\left(x\right) = x^2 + 8x \operatorname{ctg} \alpha + 5 \cos 2\alpha$ касается прямой $y = -7$, если абсцисса точки касания отрицательна?

Так как для $f\left(x\right) = x^2 + 8x \operatorname{ctg} \alpha + 5 \cos 2\alpha$ график – парабола, то условия задачи означают, что ее вершина касается прямой $y = -7$, значит наименьшее значение функции равно -7 при $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$;

$x_0 = -\dfrac{8 \operatorname{ctg} \alpha}{2} = -4 \operatorname{ctg} \alpha$. Тогда

$y_{\text{наим}} = y_{\min} = y\left(x_0\right) = y\left(-4 \operatorname{ctg} \alpha\right) = -7$.

Значит $\left(-4 \operatorname{ctg} \alpha\right)^2 + 8 \cdot \left(-4 \operatorname{ctg} \alpha\right) \cdot \operatorname{ctg} \alpha + 5 \cos 2\alpha = -7$.

Получим уравнение

$16\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha - 5\cos 2\alpha - 7 = 0 \quad \left(\cos 2\alpha = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha} = \dfrac{\mathrm{ctg}^2\,\alpha - 1}{\mathrm{ctg}^2\,\alpha + 1}\right);$

$16\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha - \dfrac{5\left(\mathrm{ctg}^2\,\alpha - 1\right)}{\mathrm{ctg}^2\,\alpha + 1} - 7 = 0;$

$16\,\mathrm{ctg}^4\,\alpha + 16\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha - 5\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha + 5 - 7\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha - 7 = 0;$

$8\,\mathrm{ctg}^4\,\alpha + 2\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha - 1 = 0; \quad \left(\mathrm{ctg}^2\,\alpha\right)_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{8} = \dfrac{-1 \pm 3}{8};$

$$\left[\begin{array}{l} \mathrm{ctg}^2\,\alpha = \dfrac{1}{4} \\ \mathrm{ctg}^2\,\alpha = -\dfrac{1}{2} \quad \varnothing \end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l} \mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{1}{2} \\ \mathrm{ctg}\,\alpha = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

Так как $x_0 < 0$, то подойдет только

$\alpha = \mathrm{arcctg}\,\dfrac{1}{2} + \pi n \quad \left(x_0 = -4\,\mathrm{ctg}\,\alpha\right).$

Ответ: при $\alpha = \mathrm{arcctg}\,\dfrac{1}{2} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}$ график функции $f(x) = x^2 + 8x\,\mathrm{ctg}\,\alpha + 5\cos 2\alpha$ касается прямой $y = -7$ в точке, абсцисса которой отрицательна.

18. Найдите все значения параметра α, при которых график функции $f(x) = x^2 - \left(2\sqrt{5}\cos\alpha - 3\right)x - 5\cos 2\alpha$ касается прямой $y = 3x$ в точке с отрицательной ординатой.

$f'(x) = 2x - \left(2\sqrt{5}\cos\alpha - 3\right)$. Так как значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту, то $f'(x_0) = 3$, т.е. $2x_0 - \left(2\sqrt{5}\cos\alpha - 3\right) = 3$.

Тогда $x_0 = \sqrt{5}\cos\alpha$; $\quad y_0 = 3x_0$; $\quad y_0 = 3\sqrt{5}\cos\alpha$;

$(x_0; y_0) \in \Gamma\,(y = 3x)$. С другой стороны,

$(x_0; y_0) \in \Gamma\left(f(x) = x^2 - \left(2\sqrt{5}\cos\alpha - 3\right)x - 5\cos 2\alpha\right).$

Тогда

$3\sqrt{5}\cos\alpha = \left(\sqrt{5}\cos\alpha\right)^2 - \left(2\sqrt{5}\cos\alpha - 3\right)\sqrt{5}\cos\alpha - 5\cos 2\alpha.$

Получим уравнение $5\cos^2\alpha - 10\cos^2\alpha - 5\cos 2\alpha = 0$;

$$-5\cos^2\alpha - 5\left(2\cos^2\alpha - 1\right) = 0;\quad \cos^2\alpha = \frac{1}{3};\quad \left[\begin{array}{l}\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ \cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right..$$

Так как $y_0 < 0$, то подходит только $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\alpha = \pm\left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 2\pi k.$$

Ответ: график функции
$f(x) = x^2 - \left(2\sqrt{5}\cos\alpha - 3\right)x - 5\cos 2\alpha$ касается прямой $y = 3x$ в точке с отрицательной ординатой при $\alpha = \pm\left(\pi - \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.

19. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases}\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} = a\\ 3\pi - a\pi = \arccos\left(-\dfrac{x}{4}\right)\end{cases}$$ имеет единственное решение?

1) Рассмотрим уравнение $\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} = a$. Выясним, при каких значениях параметра a оно имеет единственное решение.

Обозначим $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x}$. $D(f) = [3; 5]$.

Найдем область значений $f(x)$, т.е. $E(f)$.

По сути, для этого необходимо найти наибольшее и наименьшее значения функции на $[3; 5]$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}} = \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}{2\cdot\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{5-x}};\quad f'(x) = 0.$$

Найдем критические точки:

$\sqrt{5-x} = \sqrt{x-3}$; $5 - x = x - 3$; $x = 4$.

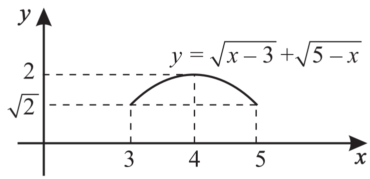
$f(4) = \sqrt{4-3} + \sqrt{5-4} = 2$;

$f(3) = \sqrt{3-3} + \sqrt{5-3} = \sqrt{2}$;

$f(5) = \sqrt{5-3} + \sqrt{5-5} = \sqrt{2}$, т.е. $E(f) = \left[\sqrt{2}; 2\right]$.

При $a = 2$ существует единственный корень $x = 4$.

Эскиз графика



2) Рассмотрим уравнение $3\pi - a\pi = \arccos\left(-\frac{x}{4}\right)$.

Так как $0 \leqslant \arccos\left(-\frac{x}{4}\right) \leqslant \pi$, то $0 \leqslant 3\pi - a\pi \leqslant \pi$;

$-3\pi \leqslant -a\pi \leqslant -2\pi$; $3 \geqslant a \geqslant 2$.

Итак, при $a = 2$ решение есть. Важно, чтобы корнем этого уравнения при $a = 2$ было $x = 4$. Проверим это.

$3\pi - 2\pi = \arccos\left(-\frac{x}{4}\right)$; $\pi = \pi - \arccos\frac{x}{4}$; $0 = \arccos\frac{x}{4}$;

$\frac{x}{4} = 1$; $x = 4$.

Ответ: система $\begin{cases} \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} = a \\ 3\pi - a\pi = \arccos\left(-\frac{x}{4}\right) \end{cases}$ имеет единственное решение при $a = 2$.

Примечание. «Система имеет единственное решение» и «первое уравнение системы имеет единственное решение, второе тоже имеет единственное решение и эти решения совпадают» – не эквивалентные высказывания.

20. При каких значениях параметра a площадь фигуры, ограниченной параболой $f(x) = x^2 - 2x + 4$, касательной, проведенной к ней в точке с абсциссой $a \in [0; 3]$, и прямыми $x = 0$, $x = 3$, принимает наибольшее и наименьшее значения?

Запишем уравнение касательной в точке a:

$y = (2a - 2)(x - a) + a^2 - 2a + 4$;

$y = 2(a - 1)x - 2a^2 + 2a + a^2 - 2a + 4$;

$y = 2(a - 1)x - a^2 + 4$.

Запишем выражение для искомой площади:

$$S(a)=\int_0^3\left(\left(x^2-2x+4\right)-2(a-1)x+a^2-4\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+4x-2(a-1)\frac{x^2}{2}+\left(a^2-4\right)x\Big|_0^3=$$

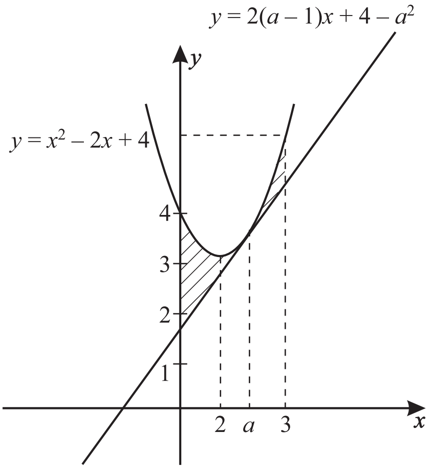
$$=9-9+12-2(a-1)\frac{9}{2}-12+3a^2=$$

$$=-9(a-1)+3a^2=3\left(a^2-3a+3\right),$$

т. е. $S(a)=3\left(a^2-3a+3\right)$.

$a_0=\frac{-(-3)}{2}=\frac{3}{2}$ (a_0 – абсцисса вершины параболы).

$S\left(\frac{3}{2}\right)=3\cdot\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+3\right)=\frac{9}{4}$; $S(0)=9$; $S(3)=9$.



Ответ: $S_{наиб}=9$ (при $a=0$; $a=3$);

$S_{наим}=\frac{9}{4}$ (при $a=\frac{3}{2}$).

Содержание

Учебное издание

Шахмейстер Александр Хаймович
ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ НА ЭКЗАМЕНАХ

Научный редактор серии *А. В. Семенов*
Художник *Е.И. Герасимчук*
Компьютерная верстка *В. Р. Ткачук, С. С. Афонин*
Компьютерный набор *Е. А. Жданов, К. В. Шевяков*
Корректоры *Е.Г. Никитина, И.Б. Смирнов, А.Б. Смирнов*

По вопросам приобретения просьба обращаться:

ИЗДАТЕЛЬСТВО МЦНМО
119002, Москва, Б. Власьевский пер., 11.
Тел.: (495) 241-7285; факс: (499) 795-1015.
E-mail: biblio@mccme.ru; www.mccme.ru.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВИКТОРИЯ ПЛЮС»
В Санкт-Петербурге: (812) 516-5811, (812) 516-5805,
В Москве (филиал): (495) 488-3005.
E-mail: victory@mailbox.alkor.ru; www.victory.sp.ru.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПЕТРОГЛИФ»
193171, С.-Петербург, Фарфоровская 18, кв 1.
Тел.: (812) 560-0598; факс: (812) 560-0524.
E-mail: spb@petroglyph.ru; www.petroglyph.ru.

Налоговая льгота — ОКП 005-93-95-3005

Подписано к печати 12.09.2009 г. Формат 60x90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 15,5 печ. л. Тираж 3000 экз. Заказ № 449.

Отпечатано в ОАО «Информационно-издательском центре
Правительства Санкт-Петербурга «Петроцентр»,
ОП «Пушкинская типография».
196601, Санкт-Петербург, г.Пушкин, ул. Средняя, 3/8.